Correction contrôle de mathématiques

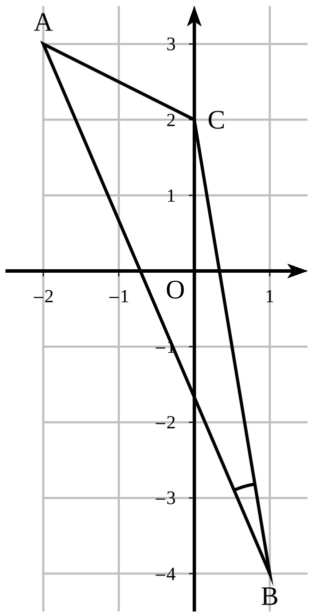
Du mercredi 10 mai 2017

Exercice 1

Produit scalaire **(3 points)**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soient les points A(−2 ; 3), B(1 ;−4), C(0 ; 2).

1) On obtient la figure suivante :



2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-(-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-(-4) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
$= (-3)(-1) + 7(6) = 45$

3) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \cos \widehat{ABC}$

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC}$

$BA = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$

$BC = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{37}$

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{45}{\sqrt{58}\sqrt{37}} = \dfrac{45}{\sqrt{2146}}$

$\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{45}{\sqrt{2146}}\right) \approx 13,74^\circ$

Exercice 2

Étude d'une courbe **(5 points)**

1) $D_f =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;\ 1[\cup]1\,;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$
La droite d'équation $y = -5$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$

3) En −2 : $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$.
En 1 : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

4) La fonction f n'admet pas de limite en 1 car la limite à droite de 1 est différente de la limite à gauche de 1.

5) La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite $y = -5$ en $-\infty$ et au dessus en $+\infty$?

6) La courbe $\mathscr{C}_f$ est concave pour $x < -2$ et pour $x > 1$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe si $-2 < x < 1$.

EXERCICE 3

Calculs de limites **(5 points)**

1) $f_1(x) = -x^3 - 2x^2 + 5 = x^3\left(-1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^3} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty \end{array}$$

2) $f_2(x) = \dfrac{2x+7}{1-x} \overset{\div x\neq 0}{=} \dfrac{2+\dfrac{7}{x}}{\dfrac{1}{x} - 1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{7}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 1 = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = -2 \end{array}$$

3) $x_1 = 1$ racine évidente. De $P = -2$, on en déduit $x_2 = -2$.
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2} -5x^2 + 4x - 8 = -36 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2 + x - 2 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2 + x - 2 = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f_3(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^-} f_3(x) = -\infty \end{array}$$

4) $f_4(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{1 - 2x} \overset{\div x\neq 0}{=} \dfrac{3x - 5 + \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} - 2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 3x - 5 + \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} - 2 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = +\infty \end{array}$$

EXERCICE 4

Étude d'une fonction **(7 points)**

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1} \overset{\div x\neq 0}{=} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x + \dfrac{1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$

2) a) $f'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+2x+1 = 0$ on a : $\Delta = 4+4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

2 racines $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2}$

c) Signe de $f'(x) = \text{signe }(-x^2+2x+1)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1{,}21$	$\nearrow$	$0{,}21$	$\searrow$	0

3) a) $(T_1) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$. On a $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 0$

$(T_1) : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

b) Soit x l'abscisse du point I. On doit résoudre :

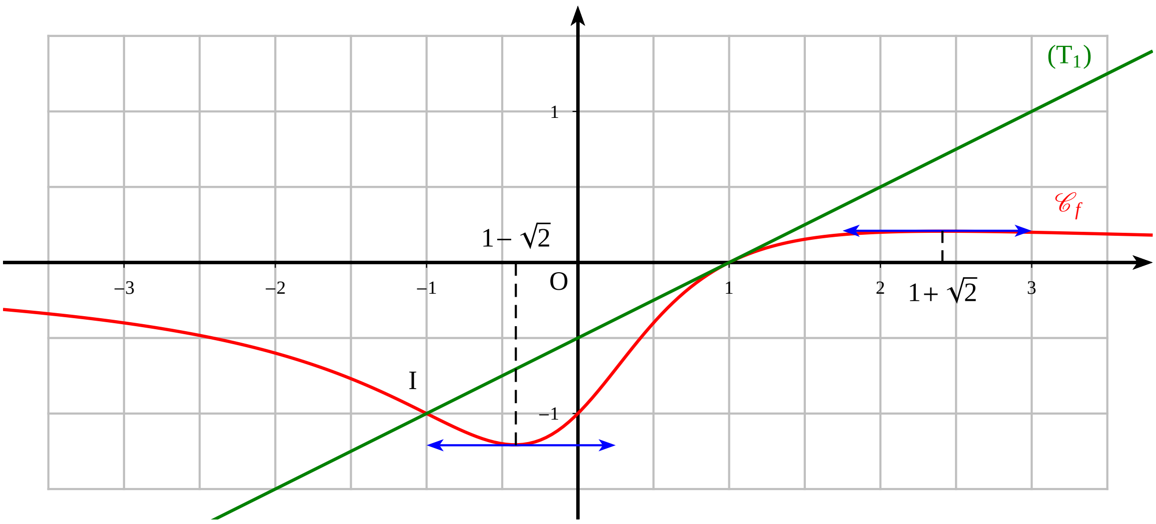
$f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1) = (x^2+1)(x-1) \quad \Leftrightarrow$

$2(x-1) - (x^2+1)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(2-x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(1-x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(1-x)(1+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-1)^2(x+1) = 0$

On trouve deux solutions $x = 1$ qui correspond à la tangente (T_1) et $x = -1$ qui correspond au point I. Comme $f(-1) = -1$ le point I a pour coordonnées $(-1\,;-1)$.

4) On obtient la courbe suivante :



5) Solutions de l'équation $f(x) = m$.

- $x < f(1-\sqrt{2})$: Pas de solution
- $x = f(1-\sqrt{2})$: 1 solution
- $f(1-\sqrt{2}) < x < 0$: 2 solutions
- $x = 0$: 1 de solution
- $0 < x < f(1+\sqrt{2})$: 2 solutions
- $x = f(1+\sqrt{2})$: 1 solution
- $x > f(1+\sqrt{2})$: Pas de solution