

Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 16 octobre 2017

EXERCICE 1

Forme canonique et représentation

(3 points)

$$1) f(x) = 4x^2 + 4x - 3 = 4\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right] = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$$

$$2) \text{ On peut mettre aussi } f(x) \text{ sous la forme : } f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4.$$

Le sommet S de la parabole \mathcal{C}_f a pour coordonnées : $S\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$

3) Comme $a = 4 > 0$ la parabole \mathcal{C}_f est tournée vers le haut.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

EXERCICE 2

questions

(5 points)

$$1) a) x_1 = 1 \text{ est racine évidente car } (2 - 1 - 1 = 0), P = -\frac{1}{2} \text{ donc } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Les racines de $f(x)$ sont $-\frac{1}{2}$ et 1 .

$$b) f(x) = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$$

$$2) a) x^2 - x - 12 = 0, \text{ on a } \Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2, \Delta > 0 \text{ deux solutions}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-7}{2} = -3 \quad \text{soit } S = \{-3; 4\}$$

$$b) 3x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0, \text{ on a } \Delta = 6 - 12 = -6, \Delta < 0 \text{ pas de solution } S = \emptyset$$

$$c) \frac{3x^2 + 10x + 8}{x + 2} = 2x + 5 \quad D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$x \in \mathbb{D}_f,$$

on effectue un produit en croix

$$3x^2 + 10x + 8 = (x + 2)(2x + 5)$$

$$3x^2 + 10x + 8 = 2x^2 + 5x + 4x + 10$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1 \in D_f \text{ racine évidente, } P = -2 \text{ donc } x_2 = -2 \notin D_f$$

$$S = \{1\}$$

d) $3x^4 - 4x^2 - 15 = 0$ on pose $X = x^2$ avec $X \geq 0$, l'équation devient :

$3X^2 - 4X - 15 = 0$, on a $\Delta = 16 + 180 = 196 = 14^2$, $\Delta > 0$ deux solutions

$$X_1 = \frac{4 + 14}{6} = 3 \text{ (retenu)} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{5}{2} \text{ (non retenu)}$$

On revient x : $x^2 = 3$ donc $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ d'où $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

EXERCICE 3

Inéquation

(5 points)

1) $-x^2 + 4x + 5 > 0$,

$x_1 = -1$ racine évidente car $(-1 - 4 + 5 = 0)$, $P = -5$ donc $x_2 = 5$

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$		
$-x^2 + 4x + 5$		-	0	+	0	-

$$S =]-1; 5[$$

2) $(2x + 3)(2x^2 - 5x - 3) > 0$, on détermine les valeurs frontières :

- $x = -\frac{3}{2}$

- racines de $2x^2 - 5x - 3$ on a $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$, $\Delta > 0$ deux racines :

$$x_1 = \frac{5 + 7}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$$

On remplit en tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$			
$2x + 3$		-	0	+	+	+		
$2x^2 - 5x - 3$		+	+	0	-	0	+	
$(2x + 3)(2x^2 - 5x - 3)$		-	0	+	0	-	0	+

$$S = \left] -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right[\cup]3; +\infty[$$

3) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} \leq \frac{3x^2 - 5x}{x(x-1)}$ $D_f = \mathbb{R}^* - \{1\}$

$x \in D_f$, on réduit au même dénominateur gauche

$$\begin{aligned} \frac{2x + 3x - 3 - 3x^2 + 5x}{x(x-1)} &\leq 0 \\ &= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x(x-1)} \leq 0 \end{aligned}$$

racines de $-3x^2 + 10x - 3$ on a $\Delta = 100 - 36 = 64 = 8^2$, $\Delta > 0$ deux racines :

$$x_1 = \frac{-10 + 8}{-6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 - 8}{-6} = 3$$

On remplit en tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	3	$+\infty$	
$-3x^2 + 10x - 3$	-	-	0	+	+	0	-
$x(x-1)$	+	0	-	-	0	+	+
$\frac{-3x^2 + 10x - 3}{x(x-1)}$	-	+	0	-	+	0	-

$$S =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; 1\right[\cup [3; +\infty[$$

EXERCICE 4**équation paramétrique****(4 points)**1) Si $m = -4$ l'équation est du premier degré. On a alors :

$$\text{On remplace } m \text{ par } (-4) : -3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

2) Si $x_1 = 1$ est solution alors $m + 4 + 2m + 5 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 4m = -8 \Leftrightarrow m = -2$

$$P = \frac{m-1}{m+4} \stackrel{m=-2}{=} -\frac{3}{2} \text{ donc } x_2 = -\frac{3}{2}$$

3) (E_m) n'a pas de solution si et seulement si $\Delta_m < 0$.

$$\Delta_m = (2m+5)^2 - 4(m-1)(m+4) = 4m^2 + 20m + 25 - 4m^2 - 16m + 4m + 16 = 8m + 41.$$

$$(E_m) \text{ n'a pas de solution si et seulement si } 8m + 41 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{41}{8}$$

EXERCICE 5**Nombre d'or****(2 points)**

$$\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EB} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5, \text{ en ne retenant que la racine positive, on a } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Le nombre d'or est en effet } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

EXERCICE 6**Représentation de la fonction trinôme****(3 points)**1) \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 5$ donc -1 et 5 sont les racines du trinôme qui peut donc se factoriser en $f(x) = a(x+1)(x-5)$.2) Si on détermine la valeur en zéro de la forme factorisée, on trouve $f(0) = -5a$.

$$\text{Comme } \mathcal{C}_f \text{ passe par le point } A(0,5), \text{ on en déduit que } -5a = 5 \Leftrightarrow a = -1.$$

$$\text{On développe cette forme factorisée : } f(x) = -(x+1)(x-5) = -x + 4x + 5$$

$$\text{On en déduit alors les coefficients : } a = -1, b = 4 \text{ et } c = 5.$$

3) Pour déterminer le sommet, il faut mettre $f(x)$ sous la forme canonique :

$$f(x) = -(x^2 - 4x - 5) = -[(x-2)^2 - 4 - 5] = -[(x-2)^2 - 9] = -(x-2)^2 + 9.$$

Les coordonnées du sommet sont donc $S(2;9)$.