Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 27 novembre 2017

EXERCICE 1

Ensemble de définition **(4 points)**

Déterminer en vous justifiant, les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) Racine de $x^2 - 3x - 4$. $x_1 = -1$ racine évidente, $P = -4$ donc $x_2 = 4$.

   Conclusion : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 4\}$

2) Condition : $4 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow -x \geqslant -4 \Leftrightarrow x \leqslant 4$.

   Conclusion : $D_f =]-\infty\ ;\ 4]$

3) Conditions : $\begin{cases} x(x-3) \geqslant 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$\dfrac{x}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

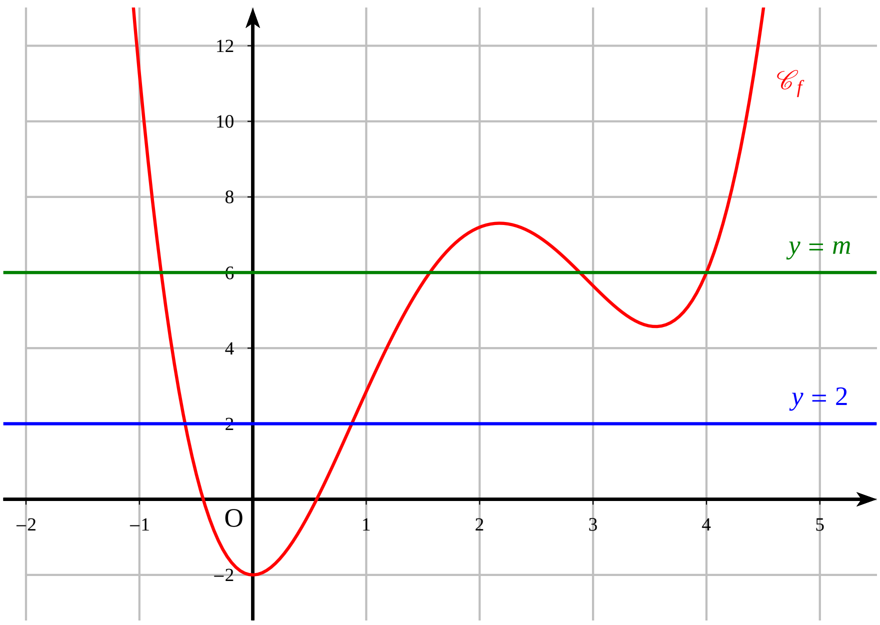
   Conclusion : $D_f =]-\infty\ ;\ 0] \cup]3\ ;+\infty[$

4) Condition : $x \neq 1$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

EXERCICE 2

Résolution graphique **(6 points)**

1) On obtient l'allure de la courbe suivante :



2) a) On obtient le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	$-\infty$		0		$2{,}18$		$3{,}55$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$7{,}30$	$\searrow$	$4{,}57$	$\nearrow$	$+\infty$

b) L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β car la courbe coupe deux fois l'axe des abscisses.

On trouve les valeurs approchées suivantes $\alpha \approx -0,44$ et $\beta \approx 0,56$.

c) On trace la droite horizontale $y = 2$.
On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont en dessous ou sur la droite d'équation $y = 2$.

On trouve S$= [-0,60\ ;\ 0,87]$

d) Pour que l'équation $f(x) = m$ admette 4 solutions, la courbe $\mathscr{C}_f$ doit couper 4 fois la droite horizontale d'équation $y = m$.
Ceci n'est possible que si $m \in]4,57\ ;\ 7,30[$.

Exercice 3

Valeur absolue **(4 points)**

1) a) $$\begin{aligned} 7 - 2|x+3| = -3 &\Leftrightarrow -2|x+3| = -10 \Leftrightarrow |x+3| = 5 \\ &\Leftrightarrow x + 3 = 5 \text{ ou } x + 3 = -5 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -8 \end{aligned}$$

$S = \{-8\ ;\ 2\}$

b) $$\begin{aligned} |2 - 3x| = |2x+1| &\Leftrightarrow 2 - 3x = 2x + 1 \text{ ou } 2 - 3x = -2x - 1 \\ &\Leftrightarrow -5x = -1 \text{ ou } -x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

$S = \left\{\dfrac{1}{5}\ ;\ 3\right\}$

c) $|5x - 2| \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant 5x \leqslant 6 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{5} \leqslant x \leqslant \dfrac{6}{5}$.

$S = \left[-\dfrac{2}{5}\ ;\ \dfrac{6}{5}\right]$

d) $$\begin{aligned} |3 - 2x| > 5 &\Leftrightarrow 3 - 2x > 5 \text{ ou } 3 - 2x < -5 \\ &\Leftrightarrow -2x > 2 \text{ ou } -2x < -8 \\ &\Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 4 \end{aligned}$$

$S =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]4\,;+\infty[$

2) $\mathrm{I} =]-9;-1[$, on cherche

$$\left.\begin{array}{l} \text{le centre de l'intervalle } \dfrac{-9-1}{2} = -5 \\ \text{puis le rayon } r = -1 - (-5) = 4 \end{array}\right\} \text{ On a alors } |x+5| < 4.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{J} =]-\infty\,;-5] \cup [1\,;+\infty[,\ \text{ on cherche} \\ \text{le centre de l'union d'intervalles } \dfrac{-5+1}{2} = -2 \\ \text{puis le rayon } r = 1-(-2) = 3\end{array}\right\}\quad \text{On a alors } |x+2| \geqslant 3.$$

EXERCICE 4

Variation des fonctions carrées et homographiques **(2 points)**

1) On obtient le tableau de variation de la fonction $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$ suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$			5		
	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

2) On obtient le tableau de variation de la fonction $g(x) = \dfrac{-3}{x-2} - 2$ suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$			$+\infty$ ‖		-2
	-2	↗	‖ $-\infty$	↗	

EXERCICE 5

Variation des fonctions associées **(4 points)**

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ sur $\text{I} =]-3\,;+\infty[$

On pose $u(x) = x+3$, $v(x) = \sqrt{u(x)}$, donc $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$

Sur I :

- u est une fonction affine croissante car $a = 1 > 0$.
- u et $\sqrt{u}$ ont même variation, donc v est croissante.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires donc f est décroissante.

2) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+3}$ sur $\text{I} = [0\,;+\infty[$

On pose $u(x) = x^2$, $v(x) = u(x) + 3$, $w(x) = \dfrac{1}{v(x)}$, donc $f(x) = -2w(x)$

Sur I :

- La fonction carrée est croissante, donc u est croissante.
- u et $u+3$ ont même variation, donc v est croissante.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires donc w est décroissante.
- w et $-2w$ ont des variations contraires donc f est croissante.

3) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x-1}$ sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;\,0]$

On pose $u(x) = x - 1$, $v(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, $w(x) = 3v(x)$, donc $f(x) = x^2 + w(x)$

Sur I :

- u est une fonction affine croissante car $a = 1 > 0$.
- u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires, donc v est décroissante.
- v et $3v$ ont même variation donc w est décroissante.

Comme la fonction carré et la fonction w sont décroissante sur I, leur somme f est décroissante.

4) Sur I, on a $x + 2 < 0$, donc $|x+2| = -x-2$ et donc $f(x) = \dfrac{-5}{x+2}$

On pose $u(x) = x + 2$, $v(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, donc $f(x) = -5v(x)$

Sur I :

- u est une fonction affine croissante car $a = 1 > 0$.
- u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires, donc v est décroissante.
- v et $-5v$ ont des variations contraires donc f est croissante.