Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 12 février 2018

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

1) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + (n+1) - 2n^2 - n = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\quad 4n + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0.$
La suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) a) $u_{51} = u_{20} + 31r \quad \Leftrightarrow \quad 31r = u_{51} - u_{20} \quad \Leftrightarrow \quad r = \dfrac{u_{51} - u_{20}}{31} = \dfrac{145 - 52}{31} = 3$

$u_{20} = u_0 + 20r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_{20} - 20r = 52 - 20 \times 3 = -8$

b) $u_{150} = u_0 + 150r = -8 + 150 \times 3 = 442.$

2) S est la somme des N premiers termes d'une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 2 :

Nombre de termes : $N = \dfrac{452 - 2}{5} + 1 = 91,$

On a alors $S = N\left(\dfrac{\sum \text{termes extrèmes}}{2}\right) = 91 \times \dfrac{2 + 452}{2} = 20\,657$

3) a) $v_n = 39\,366 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 q^n = 39\,366 \quad \Leftrightarrow \quad 18 \times 3^n = 39\,366 \quad \Leftrightarrow \quad 3^n = \dfrac{39\,366}{18} = 2\,187.$
D'après le tableau fourni, on trouve $n = 7$

b) S' est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 18. Il s'agit donc de la suite (v_n)

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_7 = v_0 \times \frac{1 - q^8}{1 - q} = 18 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 9(3^8 - 1) = 59\,040$$

EXERCICE 3

Limite d'une suite **(5 points)**

1) a) $u_1 = 0,6u_0 + 400 = 0,6 \times 800 + 400 = 880,$
$u_2 = 0,6u_1 + 400 = 0,6 \times 880 + 400 = 928,$
$u_3 = 0,6u_2 + 400 = 0,6 \times 928 + 400 = 956,8.$

b) La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique car ni la différence, ni le rapport de deux termes consécutifs sont constant. En effet :

- $u_1 - u_0 = 880 - 800 = 80$ et $u_2 - u_1 = 928 - 880 = 48$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

- $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{880}{800} = \dfrac{11}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{928}{880} = \dfrac{58}{55}$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0,6u_n + 400 - 1000 = 0,6u_n - 600 = 0,6(u_n - 1000) = 0,6v_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,6$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = -200$.

b) On en déduit alors $v_n = v_0\, q^n = -200 \times (0,6)^n$
et par suite $u_n = v_n + 1000 = 1000 - 200 \times (0,6)^n$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,6)^n = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$. Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1000$

Exercice 4

Rebonds d'une balle **(4 points)**

1) Comme la balle, à chaque rebond, perd 10 % de sa hauteur, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_{n+1} = h_n - 0,1h_n = 0,9h_n$$

La suite (h_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,9$.

2) La balle rebondit tant que sa hauteur est supérieure ou égal à 1 cm soit 0,01 m

```
Variables : N : entier et H réel
Entrées et initialisation
    0 → N
    24 → H
Traitement
    tant que H ⩾ 0,01 faire
        N + 1 → N
        0,9H → H
    fin
Sorties : Afficher N
```

On trouve alors 74 rebonds.

3) Pour déterminer la distance que parcourt la balle, il faut remarquer que la balle effectue la hauteur h_n deux fois, en montant et en descendant. Seule la hauteur h_0 n'est parcourue qu'une fois. Soit d_{74} la distance parcourue pendant les 74 rebonds :

$$d_{74} = h_0 + 2(h_1 + h_2 + \cdots + h_{74}) = 2(h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{74}) - h_0 = 2h_0 \times \frac{1 - q^{75}}{1 - q} - h_0$$
$$= 48 \times \frac{1 - 0,9^{75}}{1 - 0,9} - 24 = 480(1 - 0,9^{75}) - 24 \approx 455,82 \text{ m}$$

Exercice 5

Nombre de termes **(4 points)**

1) $u_n = u_0 + nr = 9 + 4n$.

2) $S_n = 5\,559 \iff (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right) = 5\,559 \iff (n+1)\left(\dfrac{9 + 9 + 4n}{2}\right) = 5\,559 \iff$

$(n+1)(9+2n) = 5\,559 \iff 9n + 2n^2 + 9 + 2n - 5\,559 = 0 \iff 2n^2 + 11n - 5\,550 = 0$

3) $\Delta = 11^2 - 8 \times 5\,550 = 44\,521 = 221^2$ La racine positive est $n = \dfrac{-11 + 211}{4} = 50$

4) Pour retrouver le résultat $n = 50$, on peut écrire l'algorithme suivant :

Variables : N, S, U : entiers
Entrées et initialisation
  $0 \rightarrow N$
  $9 \rightarrow U$
  $9 \rightarrow S$
Traitement
  tant que $S < 5\,559$ **faire**
    $N + 1 \rightarrow N$
    $U + 4 \rightarrow U$
    $S + U \rightarrow S$
  fin
Sorties : Afficher N

On retrouve ainsi le résultat $n = 50$.