# Correction du devoir du lundi 5 mars 2018

## EXERCICE 1

**Coefficient** **(4 points)**

1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

2) a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{MN}\left(-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{AC}$$

$$\overset{1)}{=} \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \alpha\left(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \left(\frac{3}{4} - \alpha\right)\overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{BC} \text{ donc } \overrightarrow{MP}\left(\frac{3}{4} - \alpha\,;\,\alpha\right)$$

b) M, N et P alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} - \alpha \\ \dfrac{1}{2} & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\alpha = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

M, N et P sont alignés si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{3}{2}$

## EXERCICE 2

**Alignement** **(4 points)**

1) On pose A$(x\,;\,y)$ :

$$\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-(-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On obtient alors : A$(3\,;\,6)$

On pose B$(x\,;\,y)$ :

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-(-3) \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1-0 \\ -1-(-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On obtient alors : B$(-3\,;\,3)$

2) $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3-(-9) \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -3-(-9) \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires donc les points P, A et B sont alignés (B est le milieu de [PA])

## Exercice 3

**Conjecture** **(4 points)**

1) On pose G$(x, y)$ et O l'origine du repère orthonormé.

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}\right) + 2\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-2-2 \\ -1-4+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On obtient alors $G\left(-\dfrac{3}{4} ; -\dfrac{3}{4}\right)$

2) On pose D$(x\,;\,y)$ :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 2-(-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

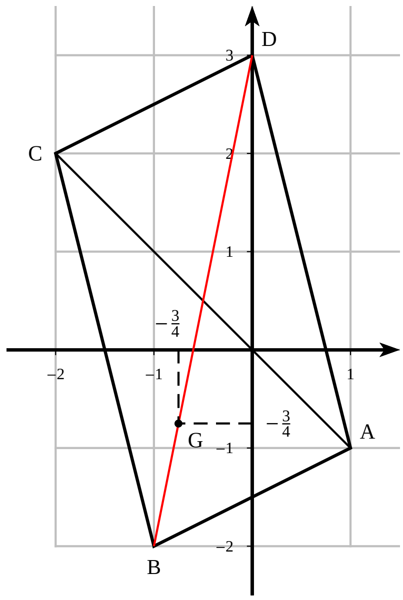
On obtient alors : D$(0\,;\,3)$

3) On obtient la figure suivante où les points B, G et D semble alignés.

$\overrightarrow{BG}\left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{5}{4}\right)$ et $\overrightarrow{BD}(1\,;\,5)$

Donc : $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BG}$

les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires et donc les points B,G et D sont alignés.




## Exercice 4

**Quadrilatère** **(4 points)**

a) Soit I $= m$[AB] donc $I = \left(\dfrac{-1+7}{2} ; \dfrac{2-8}{2}\right) = (3\,;-3)$

Comme I $= m$[AB], on a : IA = IB, de plus

$IA = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$ et

$IE = \sqrt{(8-3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

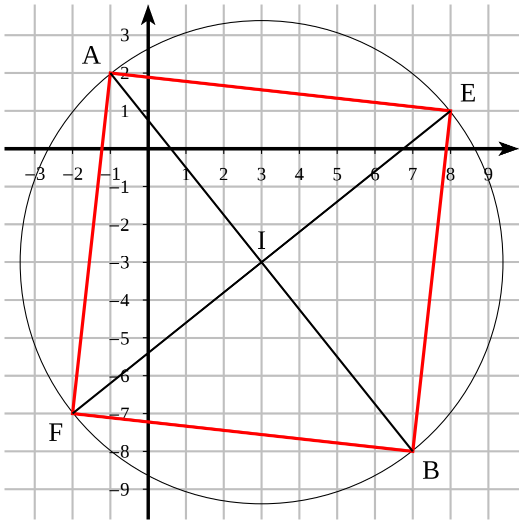
Donc IA = IB = IE donc E est sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

b) F, symétrique de E par rapport à I, on pose F$(x, y)$ donc

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-8 \\ y-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3-8 \\ -3-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-8 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

On obtient alors F$(-2\,;-7)$

c) On obtient la figure suivante : le quadrilatère AEBF semble être un carré :




[AB] et [EF] sont deux diamètres du cercle $\mathscr{C}$, donc les diagonales du quadrilatère AEBF se coupent en leur milieu, AEBF est donc un parallélogramme.

De plus comme AEBF est inscriptible dans un cercle, AEBF est un rectangle.

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{(8-(-1))^2 + (1-2)^2} \\ &= \sqrt{81+1} = \sqrt{82} \\ AF &= \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-7-2)^2} \\ &= \sqrt{1+81} = \sqrt{82} \end{aligned}$$

Le rectangle AEBF a deux côtés consécutifs de même longueur donc AEBF est un carré.

## EXERCICE 5

**Prendre des initiatives** **(4 points)**

La hauteur $h$ d'un triangle équilatéral de côté $a$ coupe le côté en son milieu et $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

On considère le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, on a alors : $A(0\,;\,1)$, $I\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $J\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

$$\det(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}+1-0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{1}{2}-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et donc les points A, I et J sont alignés.