Correction du devoir de mathématiques
Du lundi 30 avril 2018

EXERCICE 1

Définition **(5 points)**

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}(36-25-16) = -\dfrac{5}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \overset{\text{ABCD parallélogramme}}{=} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -\dfrac{5}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} \overset{\text{colinéaires même sens}}{=} \overrightarrow{AB}^2 = 25$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1-2\\ 2-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2-2\\ -2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -3\end{pmatrix} = 12-3 = 9$

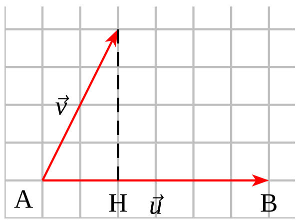
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \quad\Rightarrow\quad \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

$AB = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10} \quad$ et $\quad AC = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{9}{5\sqrt{10}} \quad\Rightarrow\quad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \arccos\left(\dfrac{9}{5\sqrt{10}}\right) \approx 55,3^\circ$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 2\times 6 = 12$

⚠ Si vous introduisez un repère, il faut le définir clairement.



EXERCICE 2

Angle droit **(2 points)**

1) $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

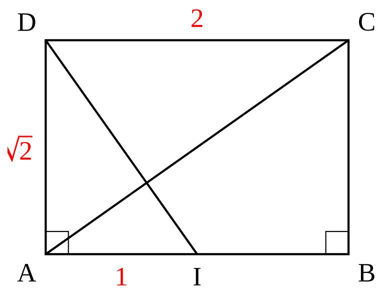
$= \underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=0} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}}_{=0}$

$= \underbrace{-DA\times BC}_{\text{sens contraire}} + \underbrace{AI\times AB}_{\text{même sens}}$

$= -\sqrt{2}\times\sqrt{2} + 1\times 2$

$= 2-2 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires.



Remarque : On aurait pu aussi introduire le repère $\left(A, \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|}\right)$ et effectuer le produit scalaire avec les coordonnées.

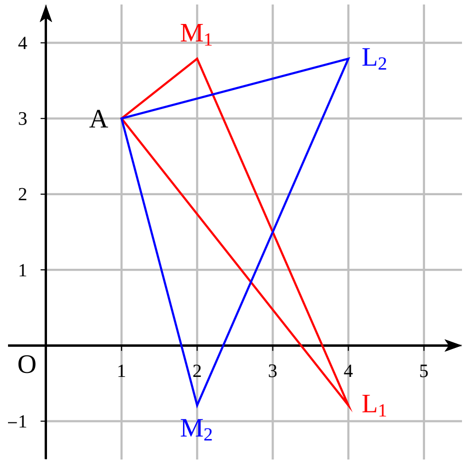
2) Le triangle MAL est rectangle en A ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AL} = 0$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-1 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-\lambda-3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$3 - \lambda(\lambda - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0$$

$\Delta = 9 + 12 = 21$ deux racines $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \approx 3,79$ ou $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \approx -0,79$

Graphiquement avec A(1,3), $M_1(2, \lambda_1)$, $L_1(4, 3-\lambda_1)$ ou $M_2(2, \lambda_2)$, $L_2(4, 3-\lambda_2)$.



EXERCICE 3

Vrai-Faux **(2 points)**

1) Proposition 1 : Fausse. Si les points A, B et C étaient alignés, on aurait $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = AB \times AC = 4 \times 3 = 12$ ce qui n'est pas le cas.

2) Proposition 2 : Fausse. Si $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{7}$, on aurait :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\dfrac{\pi}{7}$ or $\cos\dfrac{\pi}{7} > 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ impossible.

3) Proposition 3 : Vraie. En appliquant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 4^2 + 3^2 - 2(-10) = 45 \end{aligned}$$

On a alors : $BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

EXERCICE 4

Droite et cercle **(2 points)**

1) Deux façon de procéder soit avec le triangle inscrit soit en passant par le milieu.

- Par le produit scalaire.
  Soit $M(x, y) \in \mathscr{C}$ alors le triangle AMB est rectangle en M. On a alors :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1-x\\-1-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3-x\\-2-y\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(1-x)(3-x)+(-1-y)+(-1-y)(-2-y)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$3-x-3x+x^2+2+y+2y+y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x+y^2+3y+5=0$$

$$(x-2)^2-4+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

- Par le centre et le rayon.

  On calcule les coordonnées du milieu I de [AB] : $\mathrm{I}=\left(\frac{1+3}{2}\,;\,\frac{-1-2}{2}\right)=\left(2\,;-\frac{3}{2}\right)$

  On calcule le carré du rayon : $r^2=\mathrm{AI}^2=(2-1)^2+\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

  On retrouve alors l'équation de $\mathscr{C}$: $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

2) Soit $\mathrm{M}(x,y)\in(\mathrm{T})$, le triangle IAM est rectangle en A, donc :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2-1\\-\frac{3}{2}+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-1-\frac{1}{2}(y-1) \overset{\times 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2x-2-y-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x-y-3=0$$

Une équation cartésienne de (T) est : $2x-y-3=0$

Exercice 5

Relation Al-Kashi **(3 points)**

1) On a à l'aide de la relation d'Al-Kashi :

$$\mathrm{DC}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}\cos 35^\circ \overset{\mathrm{BC}=\mathrm{BD}}{=} 2\mathrm{BC}^2-2\mathrm{BC}^2\cos 35^\circ=72(1-\cos 35^\circ)$$

On a alors $\mathrm{DC}=\sqrt{72(1-\cos 35^\circ)}=6\sqrt{2(1-\cos 35^\circ)}\approx 3,61$

2) On calcule l'angle $\widehat{\mathrm{ADB}}=180-45-85=47^\circ$.

- $\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{ADB}}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{DAB}}}{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\dfrac{\mathrm{BD}\times\sin\widehat{\mathrm{ADB}}}{\sin\widehat{\mathrm{DAB}}}=\dfrac{6\sin 47^\circ}{\sin 85^\circ}\approx 4,40$
- $\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{DBA}}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{DAB}}}{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \mathrm{AD}=\dfrac{\mathrm{BD}\times\sin\widehat{\mathrm{DBA}}}{\sin\widehat{\mathrm{DAB}}}=\dfrac{6\sin 48^\circ}{\sin 85^\circ}\approx 4,48$

Exercice 6

Application à la physique **(6 points)**

1) On utilise la décomposition $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$.

- $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1}=(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3})\cdot\overrightarrow{F_1}=F_1^2+\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\cdot\overrightarrow{F_1}$

  On projette sur $\overrightarrow{F_1}$:

  $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1}=F_1^2+F_1F_2\cos\gamma+F_1F_3\cos\alpha=64+48\cos\gamma+96\cos\alpha$

- $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_2} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}) \cdot \overrightarrow{F_2} = F_1 \cdot \overrightarrow{F_2} + F_2^2 + \overrightarrow{F_3} \cdot \overrightarrow{F_2}$

  On projette sur $\overrightarrow{F_2}$:

  $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_2} = F_1F_2 \cos\gamma + F_2^2 + F_2F_3 \cos\beta = 36 + 48\cos\gamma + 72\cos\beta$

- $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_3} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}) \cdot \overrightarrow{F_3} = F_1 \cdot \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_3} + F_3^2$

  On projette sur $\overrightarrow{F_3}$:

  $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_3} = F_1F_3 \cos\alpha + F_2F_3 \cos\beta + F_3^2 = 144 + 96\cos\alpha + 72\cos\beta$

2) a) Comme $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_3} = 0$

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_3} = 0 \\ \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_1} = 0 \\ \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 96\cos\alpha + 72\cos\beta = -144 & (\div 24) \\ 96\cos\alpha + 48\cos\gamma = -64 & (\div 16) \\ 72\cos\beta + 48\cos\gamma = -36 & (\div 12) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\cos\alpha + 3\cos\beta = -6 & (1) \\ 6\cos\alpha + 3\cos\gamma = -4 & (2) \\ 6\cos\beta + 4\cos\gamma = -3 & (3) \end{cases}$$

b) Il s'agit d'éliminer une inconnue pour se ramener à un système (2×2).

De (1) : $3\cos\beta = -6 - 4\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 6\cos\beta = -12 - 8\cos\alpha$

On remplace dans (3) et on considère les équations (2) et (3), on obtient alors :

$$\begin{cases} 6\cos\alpha + 3\cos\gamma = -4 & (\times 4) \\ -8\cos\alpha + 4\cos\gamma = 9 & (\times 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24\cos\alpha + 12\cos\gamma = -16 & (4) \\ -24\cos\alpha + 12\cos\gamma = 27 & (5) \end{cases}$$

Par addition des équations (4) et (5) : $24\cos\gamma = 11 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\gamma = \dfrac{11}{24}$

On remplace dans (2) : $6\cos\alpha = -4 - \dfrac{33}{24} = -\dfrac{129}{24} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = -\dfrac{1}{6} \times \dfrac{129}{24} = -\dfrac{43}{48}$

On remplace dans (1) : $3\cos\beta = -6 + \dfrac{43}{12} = -\dfrac{29}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{29}{12} = -\dfrac{29}{36}$

On trouve alors les valeurs exactes et approchées des trois angles α, β et γ

$\alpha = \arccos\left(-\dfrac{43}{48}\right) \approx 153,6^\circ$, $\quad \beta = \arccos\left(-\dfrac{29}{36}\right) \approx 143,7^\circ$,

$\gamma = \arccos\left(\dfrac{11}{24}\right) \approx 62,7^\circ$