Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 17 octobre 2018

EXERCICE 1

Forme canonique et factorisation **(3 points)**

1) $f(x) = 2x^2 + 8x - 2 = 2(x^2 + 4x - 1) = 2\left[(x+2)^2 - 4 - 1\right] = 2\left[(x+2)^2 - 5\right]$
$f(x) = 2(x+2)^2 - 10$.

2) a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$. On a : $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$.

$\Delta > 0$, deux racines : $x_1 = \dfrac{-4+8}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-4-8}{6} = -2$.

b) $g(x) = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+2) = (3x-2)(x+2)$

EXERCICE 2

Équations **(4 points)**

1) $3x^2 - 7x - 6 = 0$, on a : $\Delta = 49 + 72 = 121 = 11^2$.

$\Delta > 0$, deux racines : $x_1 = \dfrac{7+11}{6} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7-11}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

$S = \left\{-\dfrac{2}{3}\,;\,3\right\}$

2) $\dfrac{-3}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{1}{2} = 0$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$x \in D_f$, on multiplie par $2(x-1)^2$

$-6 + 10(x-1) - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow -6 + 10x - 10 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$-x^2 + 12x - 17 = 0$

$\Delta = 144 - 68 = 76 = (2\sqrt{19})^2$, $\Delta > 0$ deux racines :

$x_1 = \dfrac{-12 + 2\sqrt{19}}{-2} = 6 - \sqrt{19} \in D_f$ ou $x_2 = 6 + \sqrt{19} \in D_f$ $S = \left\{6 - \sqrt{19}\,;\,6 + \sqrt{19}\right\}$

3) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ on pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$

L'équation devient alors : $X^2 - 12X + 27 = 0$, on a $\Delta = 144 - 108 = 36 = 6^2$.

$\Delta > 0$, deux racines : $X_1 = \dfrac{12+6}{2} = 9$ et $X_2 = \dfrac{12-6}{2} = 3$.

On revient à x : $x^2 = 9$: $x = 3$ ou $x = -3$ ou $x^2 = 3$: $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$S = \left\{-3\,;\,-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\,;\,3\right\}$

EXERCICE 3

Résolution particulière **(2 points)**

1) $x_1 = -1$ est racine évidente car : $(-1)^2 - 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

$P = -\sqrt{2}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\sqrt{2}$.

2) $15x^2 + 11x - 2018 = 0$, $\quad \Delta = 11^2 + 4 \times 11 \times 2018$.

Δ est positif (somme et produits de nbres positifs) donc l'équation admet deux racines.

De plus $P = -\dfrac{2018}{15} < 0$ les racines sont donc de signes contraires.

EXERCICE 4

Inéquation **(4 points)**

1) $-x^2 + 3x + 4 < 0$

$x_1 = -1$ est racine évidente car $-1 - 3 + 4 = 0$. De $P = -4$ on a $x_2 = 4$.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2-3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\,; -1[\cup]4\,; +\infty[$

2) a) $h(x) < 17 \iff 3x^2 + 6x - 7 < 17 \iff 3x^2 + 6x - 24 < 0 \overset{\div 3}{\iff} x^2 + 2x - 8 < 0$

$\Delta = 4{+}32 = 36 = 6^2 > 0$, deux racines : $x_1 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-2-6}{2} = -4$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$-x^2+2x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-4\,;\ 2[$

b) $h(x) > -20 \iff 3x^2 + 6x - 7 > -20 \iff 3x^2 + 6x + 13 > 0$.

$\Delta = 36 - 156 = -120 < 0$, par de racine. $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 6x + 13 > 0 \quad S = \mathbb{R}$.

3) $\dfrac{1-4x}{x^2+x-6} \leqslant 0$, $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{-3\,;\ 2\}$

Racine de $x^2 + x - 6 = 0$ $x_1 = 2$ racine évidente, $P = -6$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -3$

$1 - 4x = 0 \iff x = \dfrac{1}{4}$.

On remplit en tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$1-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{1-4x}{x^2+x-6}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$$S = \left]-3\,;\ \frac{1}{4}\right] \cup]2\,; +\infty[$$

Exercice 5

Équation paramétrique **(5 points)**

Soit l'équation $(E_m)\ :\ -mx^2 + (-3-3m)x + 3m + 3 = 0$, avec $m \in \mathbb{R}$

1) Si $m = 0$ l'équation (E_0) est du premier degré. $(E_0)\ :\ -3x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$.

2) Soit $m \neq 0$.

a) $\Delta = (-3-3m)^2 + 4m(3m+3) = 9 + 18m + 9m^2 + 12m^2 + 12m = 21m^2 + 30m + 9$
$= 3(7m^2 + 10m + 3)$.

b) (E_m) n'admet pas de solution $\Leftrightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7m^2 + 10m + 3 < 0$.

$m_1 = -1$ est racine évidente, or $P = \dfrac{3}{7}$ donc $m_2 = \dfrac{P}{m_1} = -\dfrac{3}{7}$

m	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{7}$		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	

$m \in \left]-1\,;-\dfrac{3}{7}\right[$

c) (E_m) admet deux solutions distinctes $\Leftrightarrow \quad \Delta > 0$

D'après le tableau ci-dessus : $m \in]-\infty\,;-1[\cup \left]-\dfrac{3}{7}\,;\ 0\right[\cup]0\,;+\infty[$.

$P = \dfrac{3+3m}{-m} = \dfrac{-3(m+1)}{m}$ et $S = \dfrac{3m+3}{-m} = \dfrac{-3(m+1)}{m}$ donc $P = S$.

d) Pour que l'équation $E_m)$ admette deux racines positives, on doit avoir :

$\Delta > 0,\ \ P > 0$ et $S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-3(m+1)}{m} > 0$ et $\Delta > 0$

signe de $\dfrac{-3(m+1)}{m}$ = signe de $m(-m-1)$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{7}$		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	
$\frac{-m-1}{m}$		$-$	0	$+$		$+$	||	$-$	

$$m \in \left]-\frac{3}{7}\,;\ 0\right[$$

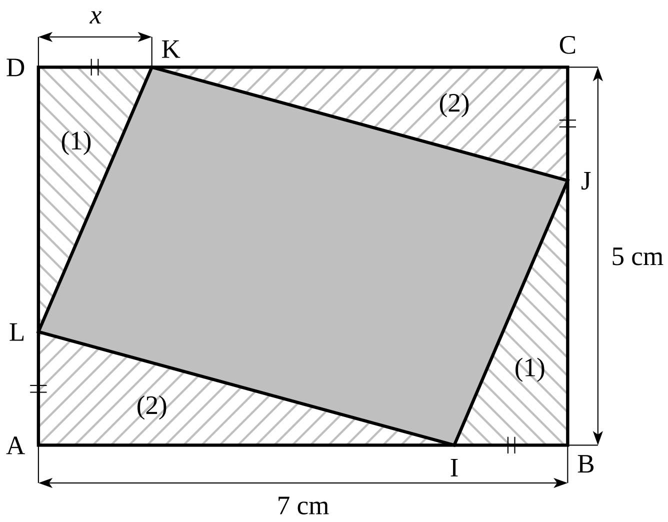
Exercice 6

Prendre toutes les initiatives **(3 points)**

Pour déterminer la surface grisée, on raisonne par le complémentaire : on calcule l'aire du rectangle diminuée des aires des quatre triangles rectangles.

$$\mathscr{A}(1) = \frac{\text{DK} \times \text{DL}}{2} = \frac{x(5-x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}(2) = \frac{\text{AL} \times \text{AI}}{2} = \frac{x(7-x)}{2}$$

$$\mathscr{A}(\text{ABCD}) = \text{AB} \times \text{AD} = 7 \times 5 = 35$$



$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\text{IJKL}) = 25 &\Leftrightarrow \mathscr{A}(\text{ABCD}) - 2\mathscr{A}(1) - 2\mathscr{A}(2) = 25\\
&\Leftrightarrow 35 - x(5-x) - x(7-x) = 25\\
&\Leftrightarrow 35 - 5x + x^2 - 7x + x^2 = 25\\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0\\
&\overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2 - 6x + 5 = 0
\end{aligned}$$

$x_1 = 1$ racine évidente, or $P = 5$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = 5$

Pour les valeurs 1 cm et 5 cm de x, l'aire de la surface grisée vaut 25 cm^2.

Remarque : pour la valeur 5 cm, les points D et L et les points B et J sont confondus.