Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 26 novembre 2018

EXERCICE 1

Ensemble de définition **(4 points)**

1) Racine de $x^2 - 2x - 3$. $x_1 = -1$ racine évidente, $P = -3$ donc $x_2 = 3$.

   Conclusion : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 3\}$

2) Condition : $3x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{3}$.

   Conclusion : $D_f = \left[-\dfrac{1}{3}\ ;+\infty\right[$

3) Condition : $(2-x)(x+3) \geqslant 0$

   Les racines sont : 2 et -3

   Le coefficient quadratique vaut (-1)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(2-x)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $D_f = [-3\ ;\ 2]$

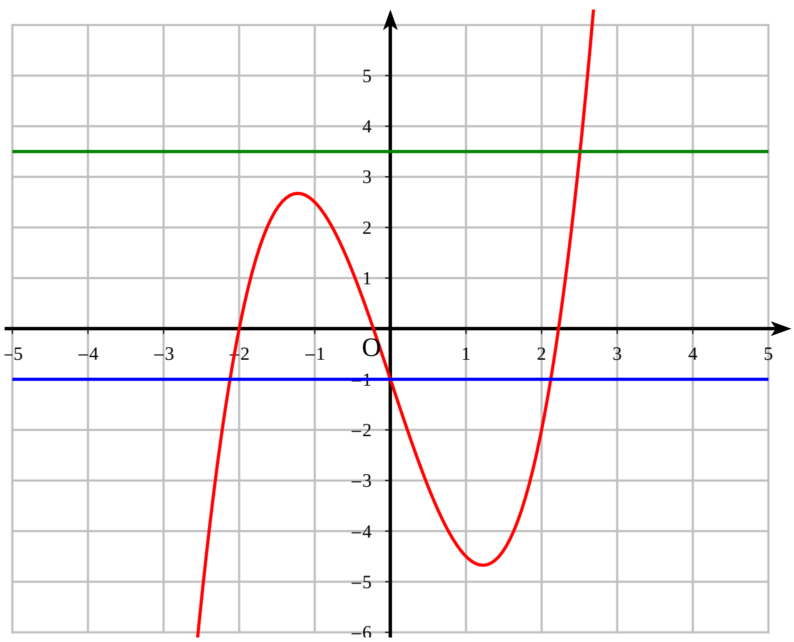
4) Conditions : $\begin{cases} x \neq 0 \\ -2x \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2} \end{cases}$

   Conclusion : $D_f =]-\infty\ ;\ 0[\cup \left]0\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$

EXERCICE 2

Résolution graphique **(6 points)**

1) On obtient l'allure de la courbe suivante :



2) a) On obtient le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	$-\infty$		$-1{,}22$		$1{,}22$		$+\infty$
$f(x)$			$2{,}67$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-4{,}67$		

b) Pour résoudre graphiquement $f(x) = 0$, on cherche les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses
On trouve 3 solutions : $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx -0,22$ et $x_3 \approx 2,22$.

c) On trace la droite horizontale $y = -1$.
Pour résoudre graphiquement $f(x) \geqslant -1$, on cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus ou sur la droite d'équation $y = -1$.

On trouve S= $[-2,12\,;\,0] \cup [2,12\,;+\infty[$

d) Pour que l'équation $f(x) = m$ admette une solution et que cette solution soit positive, la droite horizontale doit couper une seule fois la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point d'intersection doit avoir une abscisse positive.
Cela est possible si la droite $y = m$ est au dessus du maximum de f :

$$S =]2,67\,;+\infty[$$

3) a) $f(-2) = (-2)^3 - 4,5 \times (-2) - 1 = -8 + 9 - 1 = 0.$

$(x+2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c = ax^2+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$

En identifiant à la première forme, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 0 \\ c + 2b = -4,5 \\ 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2a = -2 \\ c = -4,5 - 2(-2) = -0,5 \\ 2(-0,5) = -1 \ \text{ vrai} \end{cases}$$

On a alors : $f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x - 0,5)$.

b) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2x - 0,5 = 0.$

$\Delta = 4 + 2 = 6$ deux racines $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{6}}{2} \approx -0,22$ et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{6}}{2} \approx 2,22.$

Exercice 3

Valeur absolue **(4 points)**

1) a)
$$\begin{aligned} 2 - 3|2x + 1| = -7 &\Leftrightarrow -3|2x + 1| = -9 \Leftrightarrow |2x + 1| = 3 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \ \text{ ou } \ 2x + 1 = -3 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \ \text{ ou } \ x = -2 \end{aligned}$$

$S = \{-2\,;\,1\}$

b)
$$\begin{aligned} |4x - 1| = |3 - x| &\Leftrightarrow 4x - 1 = 3 - x \ \text{ ou } \ 4x - 1 = -3 + x \\ &\Leftrightarrow 5x = 4 \ \text{ ou } \ 3x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \ \text{ ou } \ x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$S = \left\{-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{5}\right\}$

c) $|2x-3| < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 < 2x-3 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < 2x < 8 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 4$

$S =]-1\,;\,4[$

d) $$\begin{aligned} |4-x| \geqslant 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 4-x \geqslant 3 \text{ ou } 4-x \leqslant -3 \\ &\Leftrightarrow \quad -x \geqslant -1 \text{ ou } -x \leqslant -7 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 7 \end{aligned}$$

$S =]-\infty\,;\,1] \cup [7\,;+\infty[$

2) $\mathrm{I} = [1;7]$, on détermine $\left.\begin{matrix} \text{le centre } \dfrac{1+7}{2} = 4 \\ \text{le rayon } r = 7-4 = 3 \end{matrix}\right\}$ On a alors $|x-4| \leqslant 3$.

$\mathrm{J} =]-\infty\,;-2[\cup]6\,;+\infty[$, on a $\left.\begin{matrix} \text{le centre } \dfrac{-2+6}{2} = 2 \\ \text{le rayon } r = 6-2 = 4 \end{matrix}\right\}$ D'où $|x-2| > 4$.

Exercice 4

Variation des fonctions carrées et homographiques **(2 points)**

1) On obtient le tableau de variation de la fonction $f(x) = 3(x+1)^2 + 4$ suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2) On obtient le tableau de variation de la fonction $g(x) = 1 + \dfrac{-3}{x-5}$ suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Exercice 5

Variation des fonctions associées **(4 points)**

1) a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$ sur $\mathrm{I} =]4\,;+\infty[$

On pose $u : x \mapsto x-4$, $v = \sqrt{u}$, donc $f = \dfrac{1}{v}$

Sur I : $u \geqslant 0$

- u est une fonction affine croissante car $a = 1 > 0$.
- u et $\sqrt{u}$ ont même variation, donc v est croissante.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires donc f est décroissante.

b) $f(x) = \dfrac{1}{1-4x^2}$ sur $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

On pose $u \;:\; x \mapsto x^2, \quad v = -4u, \quad w = v + 1, \quad$ donc $\quad f = \dfrac{1}{w}$

Sur I : $w \neq 0$

- u est la fonction carré donc croissante car $x > 0$.
- par produit $v = -4u$ est décroissante car $(-4 < 0)$.
- par somme $w = v + 1$ est décroissante.
- w et $\dfrac{1}{w}$ ont des variations contraires donc f est croissante.

c) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pose $u \;:\; x \mapsto x^3, \quad v \;:\; x \mapsto 2x - 1, \quad$ donc $\quad f = u + v$

Sur $\mathbb{R}$:

- u est la fonction cube donc croissante par hypothèse.
- v est une fonction affine croissante car $a = 2$
- Comme u et v sont croissantes, par somme f est croissante.

2) D'après le tableau de variation de la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0$.

f et $\dfrac{1}{f}$ ont des variations contraires, on obtient le tableau de variation de g suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0