

# Contrôle de mathématiques

Lundi 04 février 2019

## EXERCICE 1

### Monotonie d'une suite

(2 points)

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = 2n^2 - 3n - 4$

- 1) Calculer  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $n$ .
- 2) Que peut-on dire de la monotonie de la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}^*$  ? Justifier.

## EXERCICE 2

### Suite arithmétique et suite géométrique

(5 points)

- 1) La suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ .  
On donne :  $u_{11} = 89$  et  $u_{34} = 250$ 
  - a) Déterminer la raison  $r$  et le premier terme  $u_0$ .
  - b) Calculer  $u_{90}$
- 2) Calculer la somme :  $S = 4 + 6 + 8 + \dots + 308$ . On précisera la formule utilisée.
- 3) La suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q > 0$  et de premier terme  $v_0$ .  
On donne :  $v_2 = 225$  et  $v_4 = 506,25$ .
  - a) Déterminer la raison  $q$  et le premier terme  $v_0$ .
  - b) Calculer  $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$ . On donnera le résultat exact puis une valeur approchée à l'unité près.

## EXERCICE 3

### Limite d'une suite : Vrai-Faux

(2 points)

Soient les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  dont les formes explicites sont :

$$u_n = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad v_n = -7 \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad w_n = \frac{1}{20}(-3)^n$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant :

**Affirmation 1 :** "La suite  $(u_n)$  est convergente vers 0."

**Affirmation 2 :** "La suite  $(v_n)$  est divergente vers  $+\infty$ ."

**Affirmation 3 :** "La suite  $(w_n)$  est divergente."

## EXERCICE 4

### Visualisation et conjecture

(5 points)

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ .

On a tracé en annexe la fonction  $f$  définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$  ainsi que la droite d'équation  $y = x$ .

- 1) a) Sur le graphique en annexe, construire les termes  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses.  
 b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et sur la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
- 2) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ . On admet que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$ 
  - a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{3}$  dont on précisera le premier terme. En déduire les variations de  $(v_n)$  puis de  $(u_n)$ .
  - b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  

$$4 + \frac{15}{n}$$
  - c) Montrer que l'on peut écrire  $u_n = \frac{4 + \frac{15}{n}}{4 + \frac{1}{n}}$ .  
 En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  en vous justifiant.

## EXERCICE 5

### Placement

(6 points)

Alice a reçu 200 000 € en héritage. Elle décide de placer cette somme et trouve un placement au taux annuel de 6 %. Cependant chaque année, elle doit retirer 9 000 € pour payer les impôt dus à ce placement. On appelle  $C_n$  le capital en **milliers d'€** au bout de  $n$  années. Ainsi  $C_0 = 200$

- 1) Expliquer pourquoi la suite  $(C_n)$  vérifie la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = 1,06C_n - 9$ .
- 2) La suite  $(C_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ? Pourquoi ?
- 3) Alice voudrait acheter une maison à 280 000 €. Elle cherche à savoir le nombre  $n$  d'années nécessaires pour pouvoir disposer de cette somme. Pour cela elle écrit un algorithme qui lui donne ce nombre d'années  $n$ .
  - a) Recopier et compléter cette algorithme pour qu'il donne ce nombre  $n$ .
  - b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice et donner le nombre d'années nécessaires.

**Variables :**  $N$  entier et  $C$  réel

**Entrées et initialisation**

| ...  $\rightarrow N$   
 | ...  $\rightarrow C$

**Traitement**

| **tant que**  $C \dots \dots$  **faire**  
 | | ...  $\rightarrow N$   
 | | ...  $\rightarrow C$   
 | **fin**

**Sorties :** Afficher ...

- 4) On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = C_n - 150$ 
  - a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique dont on précisera la raison et le 1<sup>er</sup> terme.
  - b) Exprimer  $u_n$  puis  $C_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) De quelle somme, au centime près, disposera Alice dans cinq ans ?

Nom :

Prénom :

**Annexe de l'exercice 4**  
(À rendre avec la copie)

