Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 01 avril 2019

EXERCICE 1

Équations de droites **(4 points)**

1) a) Un vecteur directeur est $\vec{u}\,(-2m\,;\,1-m)$.

b) Si $\vec{v}\,(3\,;\,2)$ est un vecteur directeur de (D_m) alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $\det(\vec{u}\,,\,\vec{v})=0$.

$$\det(\vec{u}\,,\,\vec{v})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}-2m & 3\\ 1-m & 2\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -4m-3+3m=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=-3$$

2) a) Si la droite (D_m) passe par le point A$(4\,;\,1)$ alors les coordonnées de A vérifient son équation :

$$4(1-m)+2m-4m-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4-4m+2m-4m-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad -6m=-2 \quad\Leftrightarrow\quad m=\frac{1}{3}$$

L'équation de la droite $D_{\frac{1}{3}}$ est :

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{10}{3}=0 \quad\overset{\times\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow}\quad x+y-5=0.$$

b) On remplace les coordonnées de B dans l'équation de (D_m) :

$2(1-m)+6m-4m-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-2m+6m-4m-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0m=0$ toujours vrai.

Toutes les droites (D_m) passe par le point B.

EXERCICE 2

Angles orientés **(2 points)**

1) $(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC})=-\dfrac{\pi}{6}$

2) De ACD équilatéral et ABC rectangle en A :

$(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB})=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{5\pi}{6}$

3) $(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{AC})=(-\overrightarrow{CD}\,;\,-\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA})=\dfrac{\pi}{3}$

4)
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{AB})\\ &= (\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DA})+(-\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB})+\pi\\ &\overset{2)}{=} -\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}+\pi=-\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}) &= (\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CB})=(-\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB})+(-\overrightarrow{BA}\,;\,-\overrightarrow{BC})\\ &= (\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB})+\pi+(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

EXERCICE 3

Conversions et mesure principale **(3 points)**

1) $\alpha = 12 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{15}$ rd et $\beta = 195 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{13\pi}{12}$ rd.

2) $\gamma = \dfrac{7\pi}{12} \times \dfrac{180}{\pi} = 105^\circ$ et $\delta = \dfrac{13\pi}{9} \times \dfrac{180}{\pi} = 260^\circ$.

3) La mesure principale des angles suivants dont la mesure en radian est :

a) $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

b) $-5\pi = \pi\ [2\pi]$

c) $-\dfrac{17\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

d) $\dfrac{29\pi}{8} = -\dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$

EXERCICE 4

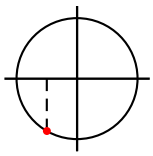
Lignes trigonométriques **(6 points)**

1) $\begin{cases} x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right] \quad \Rightarrow \quad \cos x \leqslant 0 \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}.$

2) $\begin{cases} x \in \left[\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{5\pi}{6}\right] \quad \Rightarrow \quad \sin x > 0 \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cos x = \dfrac{4}{5}.$

3) $\cos 0 + \cos \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{2} + \cos \dfrac{3\pi}{4} + \cos \pi = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0.$

4) $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$



5) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos \dfrac{5\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

6) a) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \times \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} = \dfrac{4}{4} - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0.$

Donc $X_1 = \dfrac{1}{2}$ est solution de $4X^2 - 2(1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0.$

La seconde solution est $X_2 = \dfrac{P}{X_1} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

b) On pose $X = \sin x$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
L'équation (E) devient alors : $4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$.

Les deux solutions sont acceptables, on revient alors à x :

$$\sin x_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x_1 = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_1 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x_1 = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5

Produit scalaire **(5 points)**

1) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ m+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-m+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4-m \end{pmatrix}$

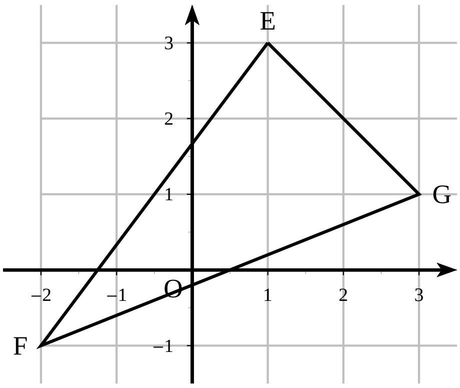
$= 3 + (m+2)(4-m) = 3 + 4m - m^2 + 8 - 2m = -m^2 + 2m + 11.$

b) Le triangle ABC est rectangle en A ssi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$\Delta = 4 + 44 = 48 \Rightarrow m_1 = \dfrac{-2+\sqrt{48}}{-2} = 1 - 2\sqrt{3}$ et $m_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

2) On obtient la figure suivante :

a)



b) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= -6 + 8 = 2$

c) En utilisant la définition projective : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \cos\widehat{FEG}$.

On en déduit alors : $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG}$.

avec $EF = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $EG = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Donc $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{2}{5 \times 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \widehat{FEG} = \arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \approx 82°$.

d) En faisant une permutation circulaire : $E \to G$, $F \to E$, $G \to F$,

On obtient : $\cos\widehat{EGF} = \dfrac{\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF}}{GE \times GF}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF} &= \begin{pmatrix}1-3\\3-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2-3\\-1-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}\\ &= 10-4=6\end{aligned}$$

$\text{GE} = 2\sqrt{2}$ et
$\text{GF} = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

Donc $\cos\widehat{\text{EGF}} = \dfrac{6}{2\sqrt{2}\times\sqrt{29}} = \dfrac{3}{\sqrt{58}} \Leftrightarrow \widehat{\text{EGF}} = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{58}} \approx 67°.$