Correction du devoir du lundi 11 mars 2019

EXERCICE 1

Nombre de segments **(5 points)**

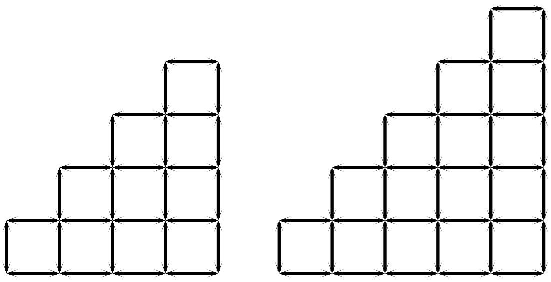
1) Étape 1 : 4 segments,

   Étape 2 : 10 segments,

   Étape 3 : 18 segments,

   Étape 4 : 28 segments,

   Étape 5 : 40 segments.



Étape 4 Étape 5

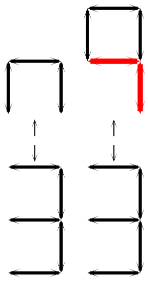
2) Soit u_{n+1} le nombre de segments ajoutés sur la nouvelle colonne pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$.

   On a alors $u_{n+1} = u_n + 2$

   La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de 1er terme $u_1 = 4$.

   On a donc

   $u_n = u_1 + (n-1)r = 4 + 2(n-1) = 2n + 2$.



u_n u_{n+1}

   S_n est alors la somme des segments des colonnes 1 à n, d'où

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n+2)$$

3) S_n est la somme des n premiers termes d'une suites arithmetique de raison $r = 2$ et de 1er terme $u_1 = 4$.

$$S_n = n \times \left(\frac{4 + 2n + 2}{2}\right) = n(n+3) \quad \Rightarrow \quad S_{10} = 10 \times 13 = 130$$

4) a) Tous les segments ne sont pas utilisés. Il faut alors déterminer un critère d'arrêt, c'est à dire savoir si l'on peut construire une colonne supplémentaire.

   Si l'on a construit k colonnes, il faut avoir encore $2(k+1) + 2 = 2k + 4$ segments pour pouvoir construire une colonne supplémentaire.

Variables : N, K, S : entiers
Entrées et initialisation
   Lire N
   $1 \to K$
   $4 \to S$
Traitement
   tant que $S + 2K + 4 \leqslant N$ **faire**
      $K + 1 \to K$
      $S + 2K + 2 \to S$
   fin
Sorties : Afficher K, $N - S$

   b) Si l'on entre $N = 1\,200$, on obtient $K = 33$ et $N - S = 12$.

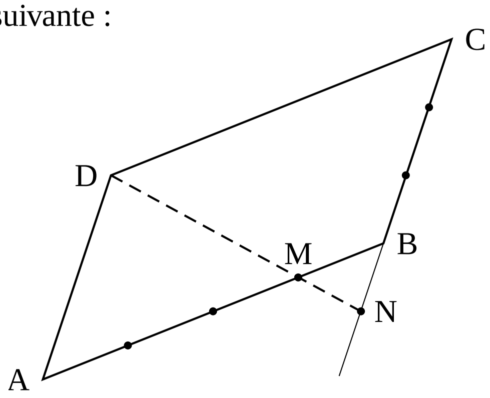
   On peut construire 33 étapes et il restera 12 segments.

EXERCICE 2

Vecteurs **(5 points)**

Partie A : un cas particulier sans utiliser un repère.

1) On peut faire la figure suivante :



2) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad 4\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \overset{\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}}{=} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CB} \overset{\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}}{=} \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \quad 3\overrightarrow{DN} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD}$

3) On en déduit que : $4\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{DN} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DN}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires et donc les points D, M et N sont alignés.

Partie B : cas général avec un repère

1) a) On a : A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1) et M(a,0).

b) Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{a}\overrightarrow{CB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{a}\overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{a}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{a}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\overrightarrow{AD}$

Les coordonnées de $N\left(1\ ,\ 1 - \frac{1}{a}\right)$.

2) $\overrightarrow{DM}\ (a\ ,-1)$ et $\overrightarrow{DN}\left(1\ ,-\frac{1}{a}\right)$. $\det(\overrightarrow{DM}\ ,\ \overrightarrow{DN}) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -\frac{1}{a} \end{vmatrix} = -a \times \frac{1}{a} + 1 = -1 + 1 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires et donc les points D, M et N sont alignés.

EXERCICE 3

Famille de droites **(7 points)**

1) $(D_0)\ :\ 2x + 2y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 1 = 0.$
Passe par les points $(-1, 0)$ et $(1,0)$.

2) (D_m) est parallèle à l'axe des abscisses ssi : $m+2=0 \;\; m=-2$.
Son équation est alors $(D_{-2}): \; -2y+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=1$.

(D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées ssi : $2m+2=0 \;\; m=-1$.
Son équation est alors $(D_{-1}): x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2$.

3) S'il existe une droite (D_m) qui passe par le point A(3; 2) alors l'équation doit être vérifiée par les coordonnées de A :

$$3(m+2)+2(2m+2)+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3m+6+4m+4+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 7m=-12 \quad \Leftrightarrow \quad m=-\frac{12}{7}$$

Son équation est alors $\left(D_{-\frac{12}{7}}\right): \; \frac{2}{7}x-\frac{10}{7}+2 \overset{\times\frac{7}{2}}{\Leftrightarrow} \; x-5y+7=0.$

Passe par les points (-7,0) et le point A.

S'il existe une droite (D_m) qui passe par le point B(-4; 2) alors l'équation doit être vérifiée par les coordonnées de B :

$$-4(m+2)+2(2m+2)+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4m-8+4m+4+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0m=2 \;\text{ impossible}$$

Il n'existe pas de droite (D_m) passant par B.

4) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux droite (D_m) et $(D_{m'})$ telles que : $(D_m)//(D_{m'})$ avec $m \neq m'$.

Leurs vecteurs directeurs $\vec{u}(-2m-2\,;\; m+2)$ et $\vec{v}(-2m'-2\,;\; m'+2)$ doivent être colinéaires :

$$\det(\vec{u}\,,\;\vec{v})=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -2m-2 & m+2 \\ -2m'-2 & m'+2 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2m-2)(m'+2)+(2m'+2)(m+2)=0$$

$$-2mm'-4m-2m'-4+2mm'+4m'+2m+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2m+2m'=0 \quad \Leftrightarrow m=m'$$

Contradiction. Deux droites quelconques de la famille (D_m) ne peuvent être parallèles.

5) Si toutes les droites (D_m) sont concourantes en $C(x_0, y_0)$, alors les coordonnées de C ne dépendent pas de m.

$$\forall m \in \mathbb{R},\;\; (m+2)x_0+(2m+2)y_0+2=0 \quad \Leftrightarrow m(x_0+2y_0)+2x_0+2y_0+2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$m(x_0+2y_0)=-2x_0-2y_0-2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0+2y_0=0 \\ x_0+y_0+1=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=1 \end{cases}$$

Les droite (D_m) sont concourantes en $C(-2\,;\;1)$.

Autre méthode : D'après le graphique, on observe que les droites (D_0), $(D_{-1}$ et (D_{-2}) sont concourantes au points $C(-2\;;\;1)$. Vérifions qu'il en est de même pour toute valeur de m. En remplaçant dans l'équation par les coordonnées de C :

$$-2(m+2)+1(2m+2)+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2m-4+2m+2+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0m=0 \text{ tjours vrai}$$

Les droites (D_m) sont donc concourantes en C.

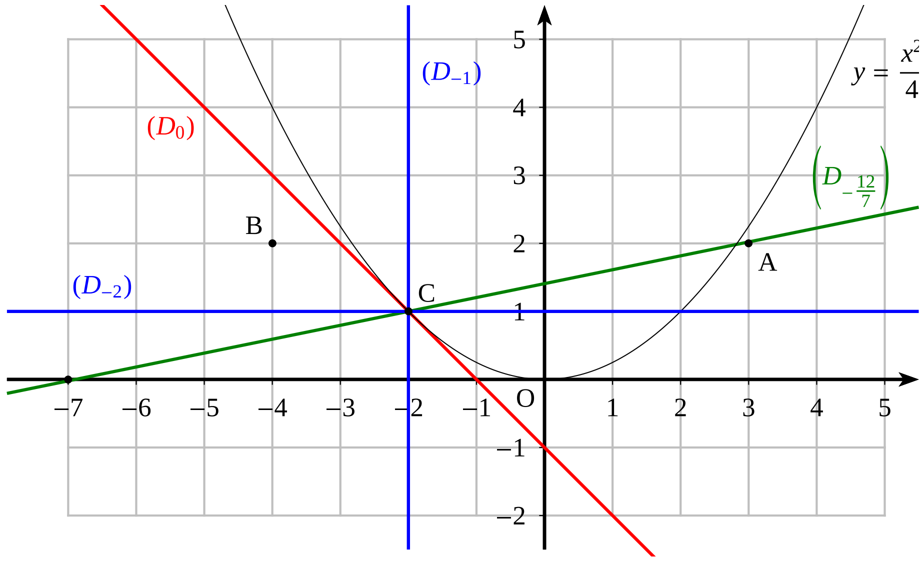
6) Cherchons les points d'intersection I entre (D_m) et la parabole $y=\dfrac{x^2}{4}$.

$$\begin{cases} (m+2)x+(2m+2)y+2=0 \\ y=\dfrac{x^2}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (m+2)x+(2m+2)\dfrac{x^2}{4}+2=0 \quad (1) \\ y=\dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$(1)\times 2 \ : \ (m+1)x^2 + 2(m+2)x + 4 = 0$$
$$\Delta = 4(m+2)^2 - 16(m+1) = 4m^2 + 16m + 16 - 16m - 16 = 4m^2$$

$\forall m \in \mathbb{R},\quad \Delta \geqslant 0.$ La droite (D_m) rencontre au moins en un point la parabole.
Pour $m = 0$, on a $\Delta = 0$, la droite (D_0) coupe la parabole en un seul point, elle est donc tangente à la parabole.
Pour les autres valeurs de m, la droite (D_m) coupe la parabole en deux points.
Il n'existe pas de valeur de m pour lequel (D_m) ne rencontrant pas la parabole.

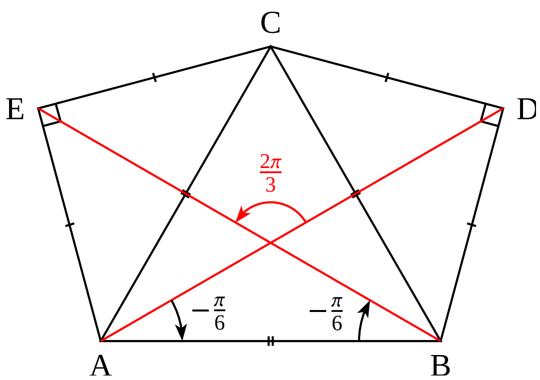
Autre méthode On peut observer sur le graphique que le point C appartient à la parabole. Vérifions le : $y_C = 1$ et $\dfrac{x_C^2}{4} = \dfrac{(-2)^2}{4} = 1 = y_C$.
Le point C est sur la parabole, comme il appartient à toute les droites (D_m), il n'existe pas de valeur de m pour lequel (D_m) ne rencontrant pas la parabole.



Exercice 4

Angles **(3 points)**

Le point D est équidistant de B et de C donc D est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
Comme les angles géométriques dans un triangle équilatéral sont égaux à $\dfrac{\pi}{3}$.
On a : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{6}$.
Par le même raisonnement avec le point E : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = -\dfrac{\pi}{6}$
En utilisant la relation de Chasles avec les angles, on obtient :



$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}) &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE})\\ &= -\frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$