Généralités sur les fonctions

Table des matières

1 Définition

1.1 Fonction numérique

Définition 1 : Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} \text{ ou } D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Attention : Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Exemples : :

- ➪ $f(x) = 3x - 7$ f est une fonction affine
- ➪ $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction du second degré
- ➪ $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$ f est une fonction homographique

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 : L'ensemble définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie

Exemples :

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ a pour ensemble de définition : $D_f =]-\infty; 4]$
(on doit avoir $4 - x \geqslant 0$)

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x - 6}$ a pour ensemble de définition : $D_g = \mathbb{R} - \{-1; 6\}$
(on doit avoir $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, $x = -1$ racine évidente)

1.3 Comparaison de fonctions

Définition 3 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement si :
➪ Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
➪ Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$

Exemple :

Les fonction f et g définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3} \geqslant 0$, ce qui donne $D_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$

Pour g, on doit avoir : $x - 1 \geqslant 0$ et $x + 3 > 0$, ce qui donne $D_g = [1; +\infty[$

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonction ne sont donc pas égales.

On remarquera cependant que sur $[1; +\infty[$, on a $f(x) = g(x)$

Définition 4 : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies au moins sur I. On dit que :

- f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \leqslant g$ sur I.
- f est positive sur I lorsque : $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. On note : $f \geqslant 0$ sur I.
- f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$.
- f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in I$.
- f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels M et m tels que : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. (f est majorée et minorée)

Remarque : La relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale car deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. On a par exemple :

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2 < 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(2) < g(2)$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$. Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

La parabole représentant f est tournée vers le bas et son sommet a pour ordonnée $\dfrac{1}{4}$. La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$.

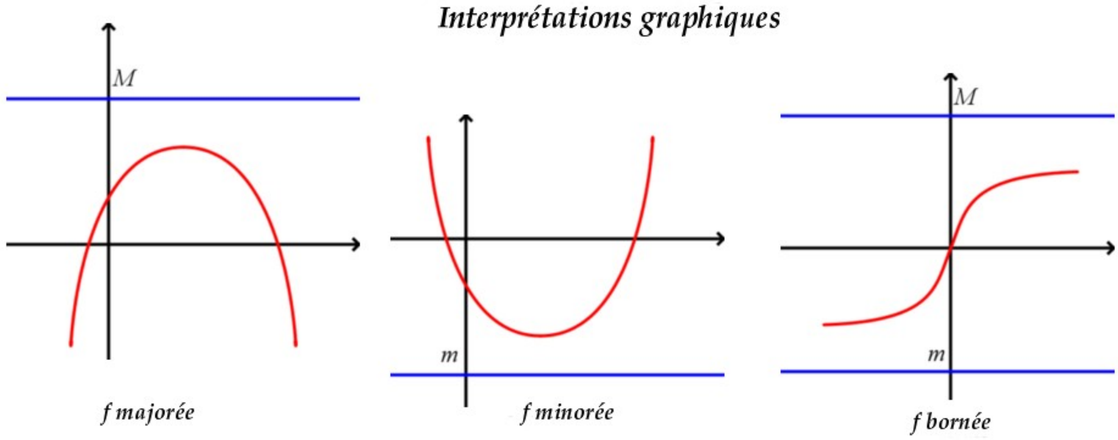
Exemple : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$ est bornée.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -4 &\leqslant 4\sin x \leqslant 4 \\ -7 &\leqslant 4\sin x - 3 \leqslant 1 \\ -7 &\leqslant g(x) \leqslant 1 \end{aligned}$$

g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Interprétations graphiques



Propriété 1 : Si f une fonction monotone sur un intervalle $I = [a; b]$ alors f est bornée.

Démonstration : Supposons que f est croissante sur $[a; b]$ (le cas f décroissante se traite de façon analogue).

Soit $x \in [a; b]$, on a alors : $a \leqslant x \leqslant b$, comme f est croissante, elle conserve la relation d'ordre, d'où : $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. On peut prendre $m = f(a)$ et $M = f(b)$, f est donc bornée.

2 Parité d'une fonction

2.1 Fonction paire

Définition 5 : On dit qu'un fonction f est paire si et seulement si l'on a :

- Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x)$

Exemples :

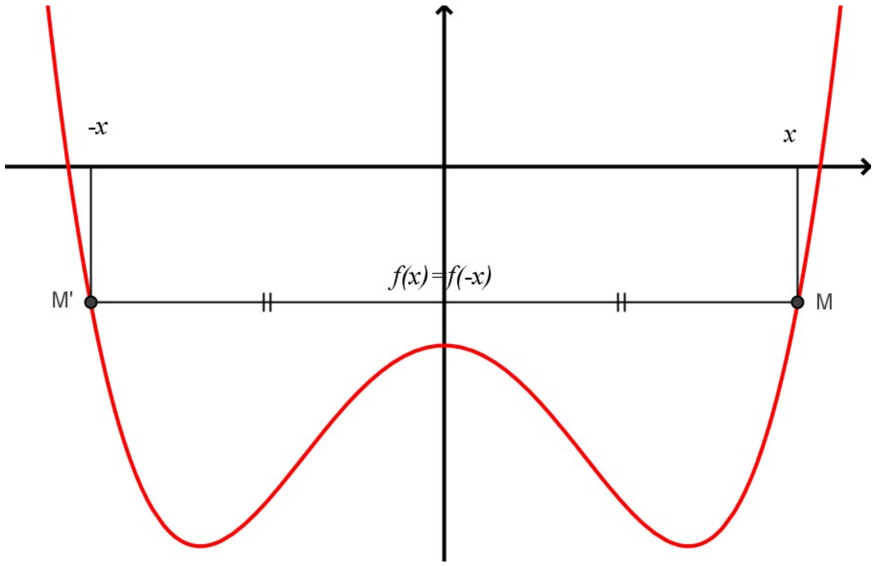
Les fonctions suivantes sont paire sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 1$$

Remarque : Ces fonction paires doivent leur nom au fait que les fonctions polynomes qui ne contiennent que des puissances paires sont telle que : $f(-x) = f(x)$

Propriété 2 : La représentation d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On a donc le graphe suivant pour une fonction paire :



2.2 Fonction impaire

Définition 6 : On dit qu'un fonction f est impaire si et seulement si l'on a :

- Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Exemples :

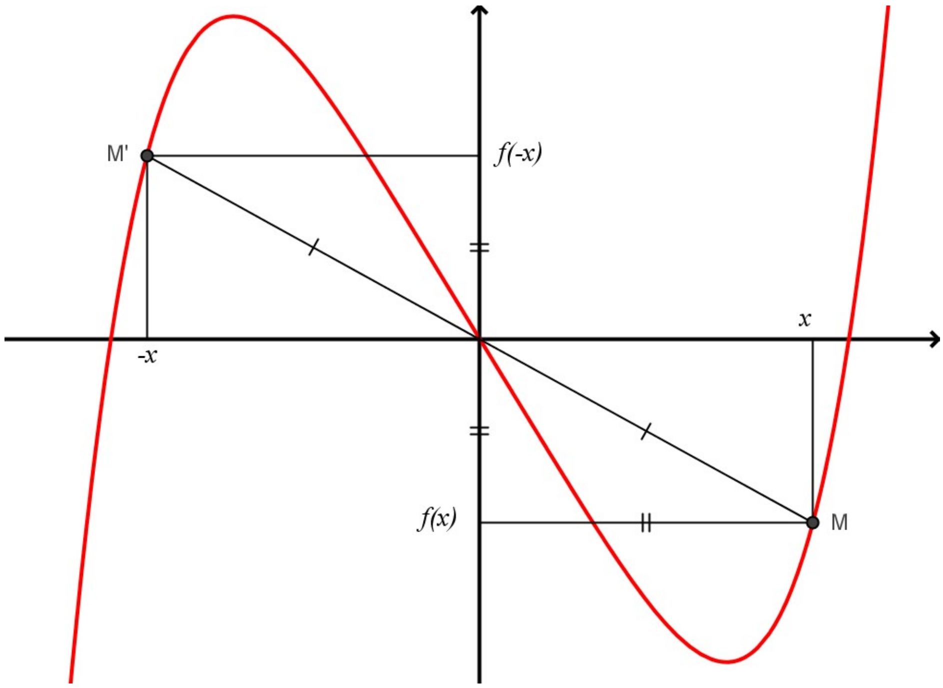
Les fonctions suivantes sont impaire sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = \sin x, \quad \tan x, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = 4x^3 - 3x$$

Remarque : Ces fonction impaires doivent leur nom au fait que les fonctions polynomes qui ne contiennent que des puissances impaires sont telle que $f(-x) = -f(x)$

Propriété 3 : La représentation d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

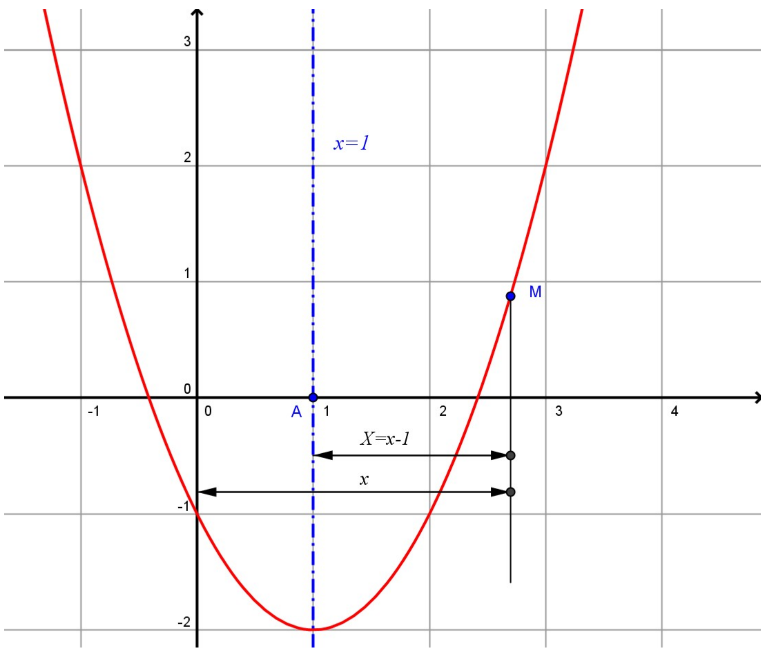
On a donc le graphe suivant pour une fonction impaire :



3 Autres symétrie

3.1 Symétrie par rapport à un axe vertical

Soit la fonction f tel que $f(x) = x^2 - 2x - 1$ dont la courbe est représentée ci-dessous :



Manifestement la courbe semble symétrique par rapport à l'axe verticale $x = 1$. Pour montrer cela, prenons un nouveau repère centré en $A(1;0)$ en gardant le même système d'unité. Un point M de la courbe a pour coordonnée dans le repère d'origine $(x; y = f(x))$ et dans le nouveau repère $(X; Y = g(X))$. Pour montrer la symétrie, il suffit de montrer que la nouvelle fonction g est paire.

Théorème 1 : Soit $A(a;0)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Si un point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X;Y)$ dans un repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors, on a les relations

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$$

Revenons à notre exemple, on a alors :

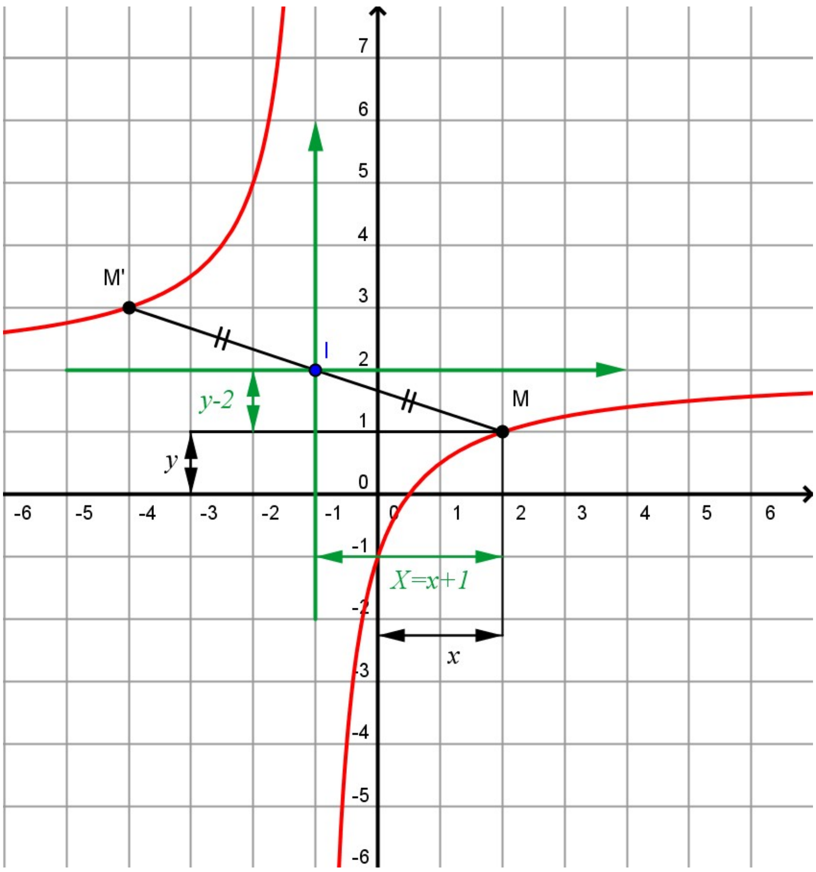
$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ g(X) = (X+1)^2 - 2(X+1) - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ g(X) = X^2 + 2X + 1 - 2X - 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ g(X) = X^2 - 2 \end{cases}$$

Comme la fonction carrée est paire, la fonction g est paire et donc la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $y = 1$.

3.2 Symétrie par rapport à un point

Soit la fonction f tel que $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ dont la courbe est représentée ci-dessous :



Manifestement la courbe semble symétrique par rapport au point $I(-1;2)$. Pour montrer cela, prenons un nouveau repère centré en $I(-1;2)$ en gardant le même système d'unité. Un point M de la courbe a pour coordonnée dans le repère d'origine $(x; y = f(x))$ et dans le nouveau repère $(X; Y = g(X))$. Pour montrer la symétrie, il suffit de montrer que la nouvelle fonction g est impaire.

Théorème 2 : Soit $I(a;b)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Si un point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X;Y)$ dans un repère $(I,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors, on a les relations

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Revenons à notre exemple, on a alors :

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = f(x) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ g(X) = \dfrac{2(X-1)-1}{X-1+1} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ g(X) = \dfrac{2X-3}{X} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ g(X) = \dfrac{2X-3-2X}{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ g(X) = \dfrac{-3}{X} \end{cases}$$

Comme la fonction inverse est impaire, la fonction g est impaire et donc la courbe de f est symétrique par rapport au point I.

3.3 Des représentations déduites par symétrie

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ représentée ci-dessous.

1) Déduire les courbes des fonctions g, h, k définies sur $\mathbb{R}$ par :

   a) $g(x) = -f(x)$

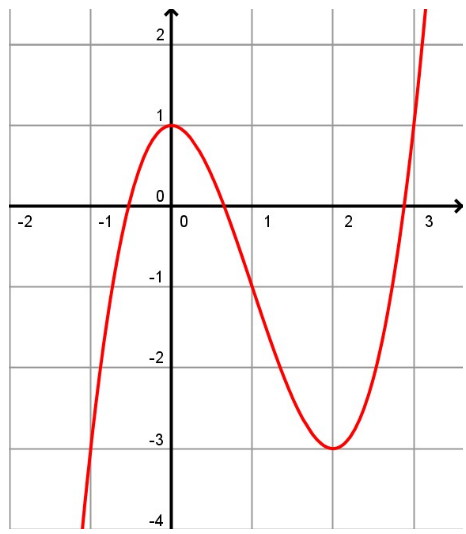
   b) $h(x) = |f(x)|$

   c) $k(x) = f(-x)$

2) On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction F par : $F(x) = f(|x|)$.

   a) Démontrer que la fonction F est paire

   b) En déduire la représentation de F



✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

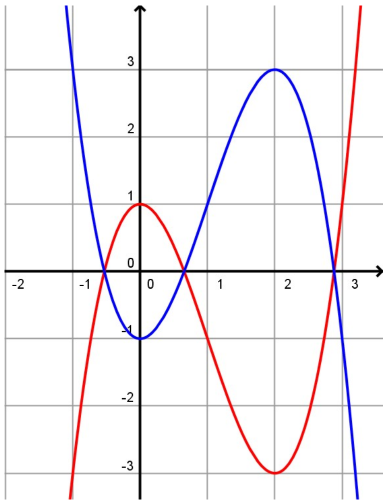
1) a) Soient M et M' les points de C_f et C_g d'abscisses x. On a donc :

$$M(x; f(x)) \quad \text{et} \quad M'(x; -f(x))$$

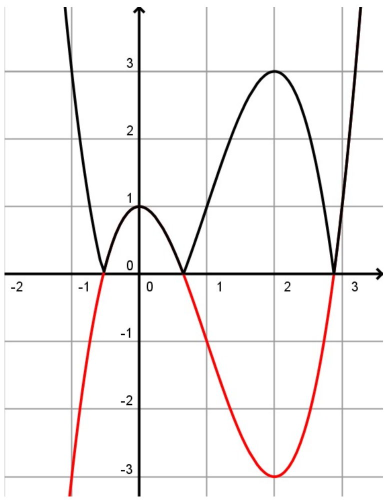
Soit I le milieu de $[MM']$. Les coordonnées de I sont : $I(x;0)$. Le point I est donc sur l'axe des abscisses.

Donc, pour tout point M de C_f d'abscisse x, le point M' de C_g d'abscisse x est tel que : $M' = S_{(Ox)}(M)$.

La courbe C_g est donc bien l'image de C_f par la symétrie par rapport à (Ox)



b) La fonction h est tel que $h(x) = f(x)$ lorsque $f(x) \geqslant 0$ et $h(x) = -f(x)$ lorsque $f(x) < 0$. On déduit alors la courbe C_h en ne changeant rien lorsque $f(x) \geqslant 0$ et en faisant une symétrie par rapport à l'axe (Ox) lorsque $f(x) < 0$.



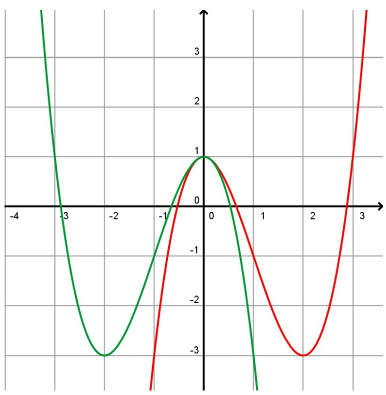
c) Soit M le point de C_f d'abscisse x. On a donc : $M(x; f(x))$.

Soit M' le point de C_k abscisse $-x$. Ainsi : $M'(-x; f(x))$

Soit I le milieu de $[MM']$. Les coordonnées de I sont : $I(0; f(x))$. Le point I est donc sur l'axe des ordonnées.

Donc, pour tout point M de C_f abscisse x, le point M' de C_k d'abscisse $-x$ est tel que : $M' = S_{(Oy)}(M)$.

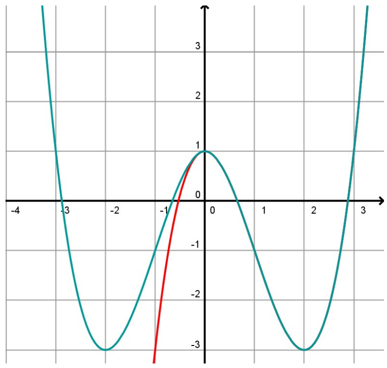
La courbe C_k est donc bien l'image de C_f par la symétrie par rapport à (Oy).



a) On a pour tout x réel : $F(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = F(x)$

La fonction F est donc paire.

b) On déduit la courbe C_F de la courbe C_f en ne changeant rien si $x \geqslant 0$ et en faisant une symétrie par rapport à l'axe (Oy) si $x < 0$



4 Variation d'une fonction

Définition 7 : Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non)

Soit f une fonction définie au moins sur I. On dit que :

- f est **croissante** sur I si, et seulement si :
  pour tous u et v de I : $\quad v > u \Rightarrow f(v) > f(u)$
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si :
  pour tous u et v de I : $\quad v > u \Rightarrow f(v) < f(u)$
- f est **monotone** sur I si, et seulement si :
  f est croissante sur I ou décroissante sur I.

Remarque : On dit qu'une fonction craoissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Nous verrons au chapitre suivant que la fonction dérivée est l'instrument qui permet de déterminer les variations d'une fonction.

5 Résolution graphique

Soit la fonction f définie sur $[-1,8;2,9]$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$ dont la représentation se trouve à la page suivante :

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction f

2) Résoudre les équations suivantes :

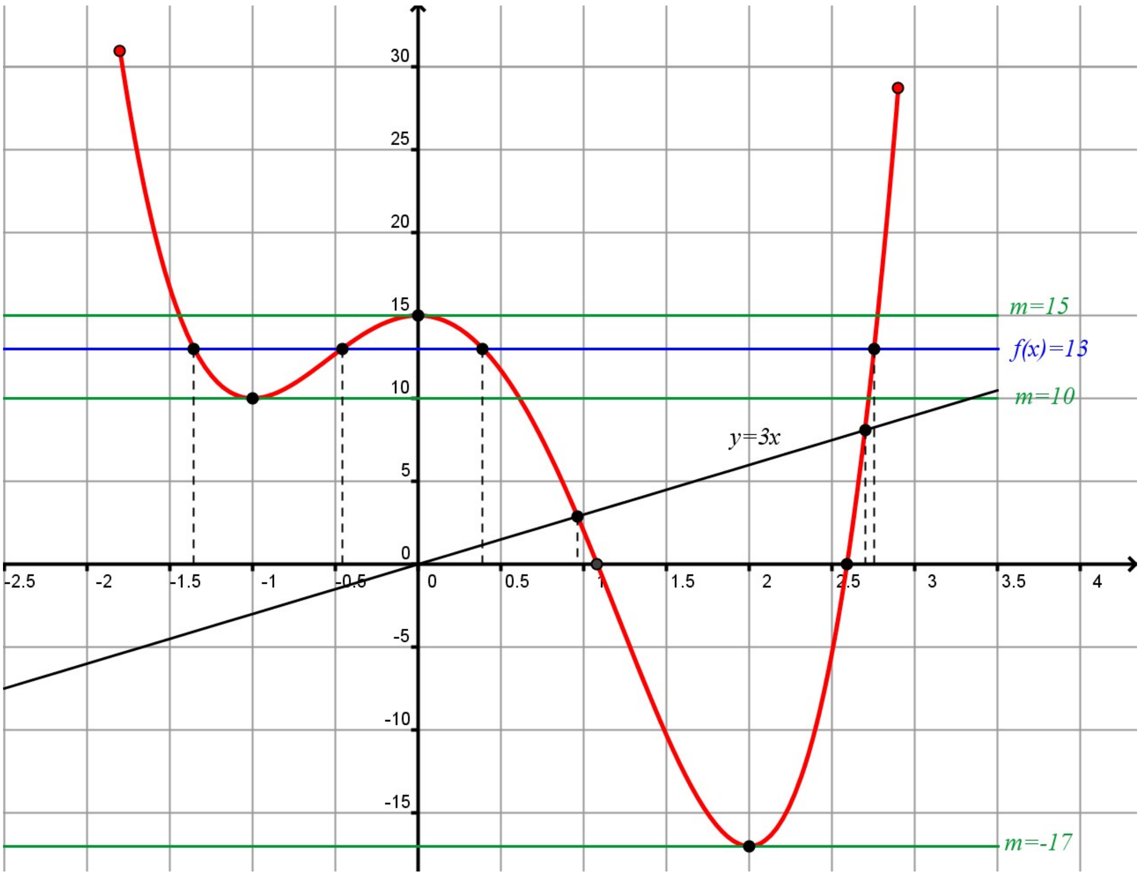
   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 13$

3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel quelconque.

4) Résoudre les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leqslant 0$ b) $f(x) > 13$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$



1) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1,8		-1		0		2		2,9
$f(x)$	31	↘	10	↗	15	↘	-17	↗	29

2) a) $f(x) = 0$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, on obtient donc :

$$x_1 \simeq 1,1 \qquad\qquad x_2 \simeq 2,6$$

b) $f(x) = 13$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = 13$, on obtient donc :

$$x_1 \simeq -1,3 \qquad x_2 \simeq -0,4 \qquad x_3 \simeq 0,4 \qquad x_4 \simeq 2,75$$

3) $f(x) = m$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = m$, on obtient donc suivant les valeurs de m :

- ➪ Si $m < -17$: l'équation n'a pas de solution
- ➪ Si $m = -17$: l'équation admet une solution (positive)
- ➪ Si $-17 < m < 10$: l'équation admet deux solutions (2 positives)

- ➪ Si $m = 10$: l'équation admet 3 solutions (1 négative et 2 positives)
- ➪ Si $10 < m < 15$: l'équation admet 4 solutions (2 négatives et 2 positives)
- ➪ Si $m = 15$: l'équation admet 3 solutions (1 négative, 1 nulle et 1 positive)
- ➪ Si $m > 15$: l'équation admet 2 solutions (1 négative et 1 positive)

4) a) $f(x) \leqslant 0$: On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont sur ou en dessous de la droite des abscisses, on a donc :

$$S = [1,1;2,6]$$

b) $f(x) > 13$: On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au dessus de la droite d'équation $y = 13$, on a donc :

$$S = [-1,8;-1,3[\cup]-0,4;0,4[\cup]2,75;2,9]$$

5) $f(x) = 3x$: On cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 3x$. On trace donc sur le graphique cette droite puis on lit les solutions :

$$x_1 \simeq 0,9 \qquad\qquad x_2 \simeq 2,7$$

6 Composée de deux fonction

6.1 Définition

Lorsqu'on applique deux fonctions successivement, on parle de composition de fonctions ou de composée de deux fonctions. On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} y = f(x) \xrightarrow{\quad g \quad} z = g(y) = g\left[f(x)\right] = g \circ f(x)$$

Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$f\left(D_f\right)$: représente l'image de l'ensemble de définition de f par la fonction f. Pour pouvoir appliquer ensuite la fonction g, il est nécessaire que cet ensemble soit inclut dans D_g : $f\left(D_f\right) \subset D_g$

$$\forall x \in D_f \quad \text{on doit avoir} \quad f(x) \in D_g$$

Exemple : : Soit les deux fonctions f et g définies par :

$f(x) = 3x + 4$ on a donc : $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ on a donc : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

Comme la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $f\left(D_f\right)$ n'est pas inclus dans D_g. Il faut donc réduire D_f.

On doit enlever la valeur de x tel que : $f(x) = -1$

$$3x + 4 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{4}$$

On a alors l'ensemble de définition de la composée : $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$

Définition 8 : Soit 2 fonctions f et g avec $f\left(D_f\right) \subset D_g$.
On appelle fonction composée de f par g, la fonction notée : $g \circ f$ telle que :

$$g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$$

La composée de deux fonctions n'est pas commutative.

Exemple : Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 4x + 3$$

Les deux fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g\left(x-2\right) = 4(x-2) + 3 = 4x - 5 \\ f \circ g(x) &= f\left(4x+3\right) = (4x+3) - 2 = 4x + 1 \end{aligned}$$

6.2 Application

1) Soit les deux fonctions suivantes f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x$$

Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ après avoir précisé les ensembles de définition.

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

On détermine $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$

Comme la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, $D_{g \circ f} = D_f$, on a alors :

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{3}{x+1}$$

Pour $f \circ g$, on doit enlever la valeur : $g(x) = -1$, soit $3x = -1$ et donc $x = -\frac{1}{3}$.

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = f(3x) = \frac{1}{3x+1}$$

Il est nécessaire de déterminer l'ensemble de définition avant de calculer la composée de deux fonctions comme nous allons le voir sur cet exemple.

2) f et g sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x+2}$$

On pose $h = g \circ f$.

a) Trouver l'ensemble de définition de h et calculer explicitement $h(x)$.

b) La fonction k est définie par $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$.

Les fonction h et k sont-elles égales ?

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

a) On a $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.
On doit donc enlever la valeur telle que $f(x) = -2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x+1} &= -2\\ x+3 &= -2x-2\\ 3x &= -5\\ x &= -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

On a donc $D_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}; -1\right\}$

$$h(x) = g\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3}{x+1}+2}$$

on multiplie numérateur et dénominateur par $x+1$

$$= \frac{x+3}{x+3+2x+2} = \frac{x+3}{3x+5}$$

b) $D_k = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$. Les fonctions ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition

Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaires pour connaître ses variations

3) Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

$$f_1(x) = \frac{1}{3x-1} \qquad f_2(x) = \sqrt{x+3} \qquad f_3(x) = 3\sqrt{x}+4$$

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

Pour la fonction f_1, on pose $f_1 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = 3x-1 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

Pour la fonction f_2, on pose $f_2 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = x+3 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

Pour la fonction f_3, on pose $f_3 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad h(x) = 3x+4$$

6.3 Variation d'une fonction composée

Théorème 3 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur $f(I)$.

- Si f et g ont **même variation** respectivement sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des **variations opposés** respectivement sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Démonstration : Nous ferons la démonstration pour une fonction f croissante sur I et une fonction g décroissante sur $f(I)$.

On sait que f est décroissante sur I, donc dans I :

$$\text{si} \quad u < v \quad \text{alors} \quad f(u) < f(v)$$

On sait que g est décroissante sur $f(I)$, donc dans $f(I)$:

$$\text{si} \quad f(u) < f(v) \quad \text{alors} \quad g[f(u)] > g[f(v)]$$

On a donc dans I :

$$\text{si} \quad u < v \quad \text{alors} \quad g \circ f(u) > g \circ f(v)$$

La fonction $g \circ f$ est décroissante sur I

Exemple : Soit la fonction h définie sur $]-\infty; 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.
2) Déterminer les variations de h.

1) La fonction h se décompose en $g \circ f$, on a alors :

$$f(x) = 1 - x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

2) On sait que la fonction :
   - f est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et $f(]-\infty; 1]) = [0; +\infty[$
   - g est croissante sur $[0; +\infty[$

   d'après le théorème des fonctions composées, h est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$

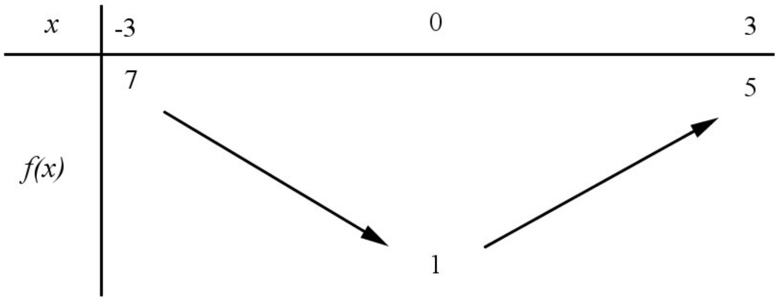
   On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0

6.4 Variations de fonctions

Exemple 1

Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie sur $[-3;3]$



On définit les fonctions g et h par :

$$g(x) = -2x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

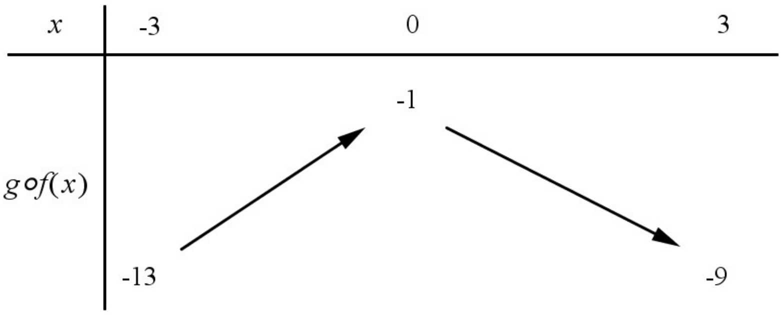
Déterminer les variations puis dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

a) $g \circ f$ b) $h \circ f$

a) Sur $[-3;0]$, d'après le tableau de variation, f est décroissante et sur $[1;7]$ la fonction g est décroissante (coefficient directeur négatif), donc d'après le théorème sur les fonctions composées, $g \circ f$ est croissante sur $[-3;0]$

Sur $[0;3]$, d'après le tableau de variation, f est croissante et sur $[1;5]$ la fonction g est décroissante (coefficient directeur négatif), donc d'après le théorème sur les fonctions composées, $g \circ f$ est décroissante sur $[0;3]$

On obtient donc le tableau de variation suivant :



Remarque :
$g \circ f(-3) = g(7) = -13, \quad g \circ f(0) = g(1) = -1$ et $g \circ f(3) = g(5) = -9$

b) Sur $[-3;0]$, d'après le tableau de variation, f est décroissante et sur $[1;7]$ la fonction h est croissante (fonction racine), donc d'après le théorème sur les fonctions composées, $h \circ f$ est décroissante sur $[-3;0]$

Sur $[0;3]$, d'après le tableau de variation, f est croissante et sur $[1;5]$ la fonction h est croissante (fonction racine), donc d'après le théorème sur les fonctions composées, $h \circ f$ est croissante sur $[0;3]$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-3		0		3
$h\circ f(x)$	$\sqrt{7}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Remarque :
$h \circ f(-3) = h(7) = \sqrt{7}$, $h \circ f(0) = h(1) = 1$ et $h \circ f(3) = h(5) = \sqrt{5}$

Exemple 2 :
h est une fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	0		5		9
$h(x)$	9	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

f et g sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad g(x) = x^2$$

On note $u = f \circ h$ et $v = g \circ h$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

a) u est définie sur $[0;9]$

b) u est décroissante sur $[0;5]$

c) $u(x)$ appartient à l'intervalle $[0;\sqrt{5}]$

d) v est définie sur $[0;9]$

e) v est décroissante sur $[0,9]$

a) $u(x) = \sqrt{h(x)}$, donc u est définie quand $h(x) \geqslant 0$.
Ceci est vérifié pour $0 \leqslant x \leqslant 5$.
L'ensemble de définition de u est donc $[0;5]$. La proposition est donc fausse !

b) Sur $[0;5]$ la fonction h est décroissante et sur $[0;9]$ la fonction f est croissante (fonction racine), donc d'après le théorème sur les composées de fonctions, la fonction u est décroissante sur $[0;5]$.

La proposition est donc vraie !

c) Comme la fonction u est décroissante sur $[0;5]$, alors on a :
$f \circ h(5) \leqslant u(x) \leqslant f \circ h(0)$

Or on a : $f \circ h(5) = f(0) = 0$ et $f \circ h(0) = f(9) = 3$

On a donc $0 \leqslant u(x) \leqslant 3$. La proposition est donc fausse !

d) $v(x) = (h(x))^2$ donc la fonction v est définie sur l'ensemble de définition de h soit $[0;9]$

La proposition est donc vraie !

e) Sur $[0;5]$ la fonction h est décroissante et sur $[0;9]$ la fonction g est croissante (fonction carrée), donc d'après le théorème sur les composées de fonctions, la fonction v est décroissante sur $[0;5]$.

Sur $[5;9]$ la fonction h est décroissante et sur $[-1;0]$ la fonction f est décroissante (fonction carrée), donc d'après le théorème sur les composées de fonctions, la fonction v est croissante sur $[-1;0]$.

La fonction v n'est pas monotone sur $[0;9]$ donc la proposition est fausse !