

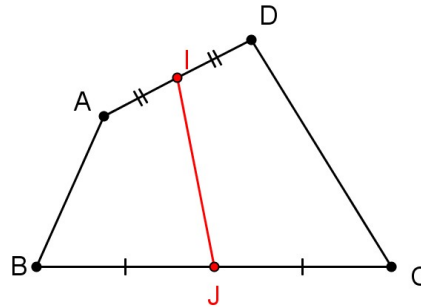
# Exercices sur le barycentre

## Exercice 1 :

### Rappels sur les vecteurs

$ABCD$  est un quadrilatère quelconque,  $I$  le milieu de  $[AD]$  et  $J$  celui de  $[BC]$ .

- 1) Ecrire  $\overrightarrow{IJ}$  comme la somme de  $\overrightarrow{AB}$  et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
- 2) Décomposer le même  $\overrightarrow{IJ}$  en utilisant  $\overrightarrow{DC}$ .
- 3) En déduire que  $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ .



## Exercice 2 :

### Rappels sur les vecteurs

$ABCD$  est un parallélogramme de centre  $O$ ,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  le point tel que  $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OC}$ .

- 1) Exprimer  $\overrightarrow{OI}$  en fonction de  $\overrightarrow{BC}$ .
- 2) Justifier l'égalité :  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$ .
- 3) Quel théorème vous permet de conclure que  $O$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés ?

## Exercice 3 :

### Rappels sur les vecteurs

$ABC$  est un triangle,  $E$  est tel que  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $I$  est tel que  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$  et  $F$  est tel que  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ . Démontrer que  $I$ ,  $E$  et  $F$  sont alignés.

## Exercice 4 :

### Rappels sur les vecteurs

$ABCD$  est un parallélogramme,  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à  $(MQ)$  menée par  $N$  coupe  $(BC)$  en  $P$ . Il s'agit de trouver le coefficient  $k$  de colinéarité tel que  $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$ . Considérons le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

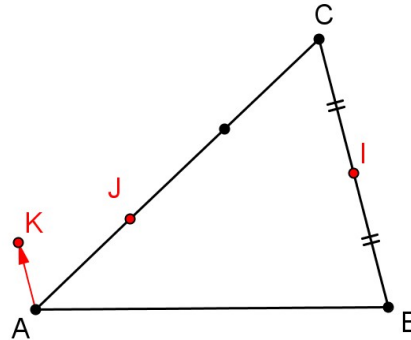
- 1) Calculer les coordonnées des points  $M$ ,  $N$  et  $Q$ .
- 2) Justifier que  $P$  a pour coordonnées  $(1; k)$ .
- 3) En déduire que les vecteurs  $\overrightarrow{MQ}$  et  $\overrightarrow{NP}$  sont colinéaires et calculer  $k$ .

**Exercice 5 :****Rappels sur les vecteurs**

Sur la figure ci-contre,  $I$  est le milieu de  $[BC]$ ,  $J$  et  $K$  sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

On considère le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .  
Calculer les coordonnées de  $I$ ,  $J$  et  $K$  puis prouver que  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice 6 :****Barycentre de deux points**

$A$  et  $B$  sont deux points tels que  $AB = 6$  cm. Construire (s'il existe) le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$  dans chacun des cas suivants :

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| 1) $\alpha = 4, \beta = -1$ | 3) $\alpha = 2, \beta = -2$                     |
| 2) $\alpha = 2, \beta = 1$  | 4) $\alpha = \frac{1}{10}, \beta = \frac{1}{5}$ |

**Exercice 7 :****Barycentre de deux points**

$A$  et  $B$  sont deux points tels que  $AB = 9$  cm. Construire (s'il existe) le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$  dans chacun des cas suivants :

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| 1) $\alpha = 4, \beta = 5$   | 4) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ |
| 2) $\alpha = 8, \beta = -5$  | 5) $\alpha = -1, \beta = -5$                    |
| 3) $\alpha = -11, \beta = 2$ | 6) $\alpha = 0, \beta = 2011$                   |

**Exercice 8 :****Barycentre de deux points**

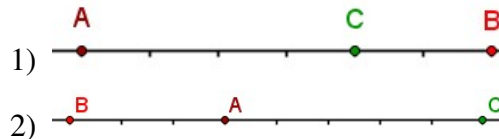
Les points  $A$  et  $B$  sont donnés et  $G$  est défini par la condition indiquée. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $G$  soit le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ .

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$ | 2) $2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ | 3) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ |
|---|--|--|

**Exercice 9 :****Barycentre de deux points**

Pour les exercices suivants, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indiqués sur la figure. Dans les deux cas suivants, trouver deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

- ⇨  $A$  soit le barycentre de  $(B, \alpha)$ ,  $(C, \beta)$  ;
- ⇨  $B$  soit le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(C, \beta)$  ;
- ⇨  $C$  soit le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ .

**Exercice 10 :****Barycentre de trois points**

$ABC$  est un triangle de centre de gravité  $G$ .  $G'$  est le symétrique de  $G$  par rapport au milieu de  $[BC]$ .

- 1) Prouver que  $G$  est le milieu de  $[G'A]$ .
- 2) Justifier que :

$$\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$$

- 3) Exprimer  $\overrightarrow{G'A}$  en fonction de  $\overrightarrow{G'B}$  et  $\overrightarrow{G'C}$  puis en déduire que  $G'$  est un barycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés de coefficients que l'on précisera.

**Exercice 11 :****Barycentre de trois points**

$ABC$  est un triangle. Construire (s'il existe) le barycentre  $G$  de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ ,  $(C, \gamma)$ . Construire d'abord un barycentre de deux points, puis utiliser la règle d'associativité.

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\alpha = 3$ , $\beta = 2$ , $\gamma = 1$   | 3) $\alpha = \frac{1}{2}$ , $\beta = -\frac{1}{3}$ , $\gamma = -\frac{1}{6}$ |
| 2) $\alpha = 1$ , $\beta = -1$ , $\gamma = -3$ | 4) $\alpha = 2$ , $\beta = 1$ , $\gamma = 2$                                 |

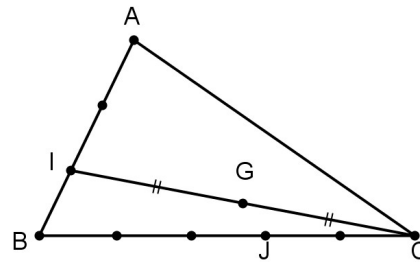
**Exercice 12 :****Barycentre de trois points**

$ABC$  est un triangle ;  $I$  est le barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, 1)$ .  $J$  celui de  $(B, 1)$ ,  $(C, -2)$  et  $G$  le barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, -2)$ . Le but de l'exercice est de localiser  $G$  à l'intersection de deux droites.

- 1) Quel théorème permet de justifier l'alignement de  $A$ ,  $J$  et  $G$ , puis celui de  $C$ ,  $I$  et  $G$  ?
- 2) En déduire que  $G$  est à l'intersection de  $(AJ)$  et de  $(CI)$ . Placer alors  $G$ .
- 3) Démontrer que  $(BG)$  et  $(AC)$  sont parallèles.

**Exercice 13 :****Barycentre de trois points**

$ABC$  est un triangle. Les points  $I$  et  $J$  sont repérés sur la figure ci-contre, dont les graduations sont régulières.  $G$  est le milieu de  $[CI]$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $A$ ,  $G$  et  $J$  sont alignés.



- 1) Exprimer  $I$  comme un barycentre de  $A$  et de  $B$ , puis  $J$  comme un barycentre de  $B$  et de  $C$ .
- 2) On note  $G'$  le barycentre de  $(A, 1)$ ,  $(B, 2)$ ,  $(C, 3)$ . Quel théorème permet de justifier que  $G'$  est le milieu de  $[IC]$ ? En déduire de  $G' = G$ .
- 3) Démontrer que  $A$ ,  $G$  et  $J$  sont alignés.

### Exercice 14 :

#### Barycentre de trois points

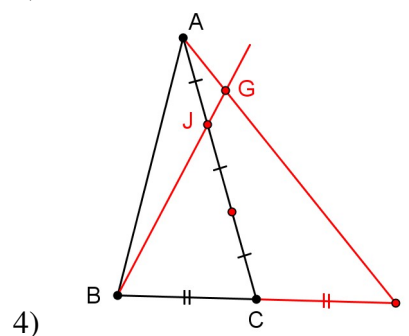
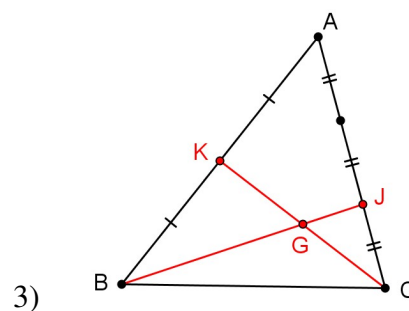
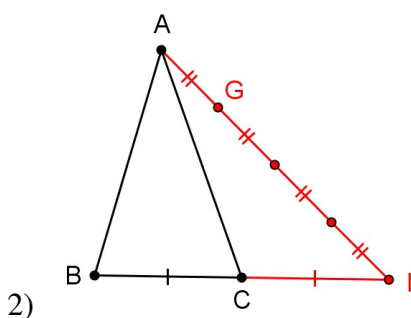
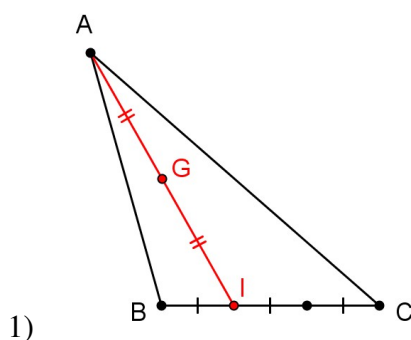
$ABC$  est un triangle de centre de gravité  $G$ . Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble  $\Delta$  des points  $M$  du plan tels que le vecteurs  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ .

- 1) Exprimer  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$  en fonction de  $\overrightarrow{MG}$ .
- 2) Justifier l'affirmation :  
"Dire que  $M$  appartient à  $\Delta$  équivaut à dire que  $\overrightarrow{GM}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ "
- 3) En déduire  $\Delta$  et le construire.

### Exercice 15 :

#### Barycentre de trois points

Pour les exercices suivants, trouver trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que  $G$  soit le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ ,  $(C, \gamma)$ .



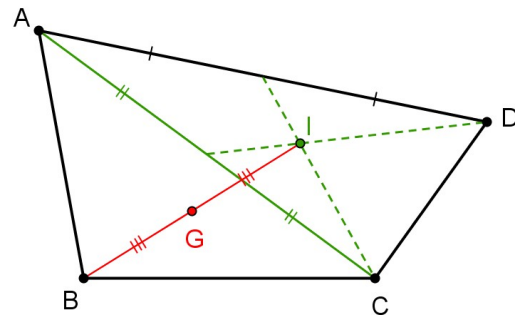
**Exercice 16 :****Barycentre de  $n$  points**

Pour les exercices suivants, justifier de l'existence du barycentre  $G$ , puis le construire.

- 1)  $ABCD$  est un rectangle et  $G$  le barycentre de  $(A, -1)$ ,  $(B, 2)$ ,  $(C, 2)$ ,  $(D, 2)$ .
- 2)  $ABCD$  est un parallélogramme et  $G$  barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, -3)$ ,  $(C, 2)$ ,  $(D, 2)$ .
- 3)  $ABCD$  est un quadrilatère et  $G$  est le barycentre de  $(A, -1)$ ,  $(B, 3)$ ,  $(C, 2)$ ,  $(D, 2)$ .

**Exercice 17 :****Barycentre de  $n$  points**

La figure ci-contre indique une construction du barycentre  $G$  de  $(A, 1)$ ,  $(B, 3)$ ,  $(C, 1)$ ,  $(D, 1)$ . Justifier cette construction.

**Exercice 18 :****Barycentre de  $n$  points**

$ABCD$  est un rectangle, construire le barycentre  $G$  de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ ,  $(C, \gamma)$ ,  $(D, \delta)$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 1$
- 2)  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = -3$
- 3)  $\alpha = -\frac{1}{8}$ ,  $\beta = \frac{3}{8}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}$

**Exercice 19 :****Coordonnées du barycentre**

- 1) Placer les points  $A(1; 3)$  et  $B(2; 1)$ .
- 2) Calculer les coordonnées des points  $M$ , barycentre de  $(A, -1)$ ,  $(B, 3)$  et  $N$ , barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, -1)$ .
- 3) Calculer les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$ .
- 4) Trouver le réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MN}$
- 5) En déduire deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $I$  soit le barycentre de  $(M, \alpha)$ ,  $(N, \beta)$ .

**Exercice 20 :****Coordonnées du barycentre**

- 1) Placer les points  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; 4)$  et  $C(-3; -2)$ .
- 2) Calculer les coordonnées du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$ .

- 3) Calculer les coordonnées de  $G'$ , barycentre de  $(A, -2)$ ,  $(B, 3)$ ,  $(C, 1)$ .
- 4) les points  $O$ ,  $G$  et  $G'$  sont-ils alignés ?

### Exercice 21 :

#### Ensemble de points

$[AB]$  est un segment de longueur 5 cm. On se propose de trouver l'ensemble  $\Gamma$  des point  $M$  tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$$

- 1) On pose  $G$  le barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, 3)$ . Réduire la somme  $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ .
- 2) En déduire la nature de  $\Gamma$ . Construire alors  $\Gamma$ .

### Exercice 22 :

#### Ensemble de points

$ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 4$  cm. On se propose de trouver l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4$$

- 1) On pose  $G$  le barycentre de  $(A, -1)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, 2)$ . Réduire la somme  $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ .
- 2) En déduire la nature de  $\Gamma$ .
- 3) Montrer que  $\Gamma$  passe par le point  $C$ . Construire  $G$  puis  $\Gamma$ .

### Exercice 23 :

#### Ensemble de points

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

- 1) Construire  $G$ , barycentre de  $(A, 1)$ ,  $(B, -1)$ ,  $(C, 1)$ , et prouver que  $ABCG$  est un losange.
- 2) Quel est l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

- 3) Vérifier que le milieu de  $[AC]$  appartient à  $\Gamma$ . Tracer  $\Gamma$ .

### Exercice 24 :

#### Ensemble de points

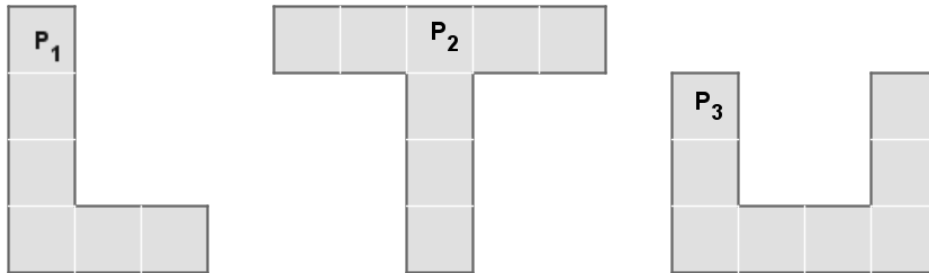
$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ ,  $I$  est le milieu de  $[BC]$ ,  $\Gamma$  est le cercle de centre  $A$  passant par  $I$ .  $G$  est le point diamétralement opposé à  $I$ .

- 1) Prouver que le point  $G$  est le barycentre de  $(A, 4)$ ,  $(B, -1)$ ,  $(C, -1)$ .
- 2) Trouver deux réels  $b$  et  $c$  tels que  $A$  est le barycentre de  $(G, 2)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ .
- 3) Quel est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\|$$

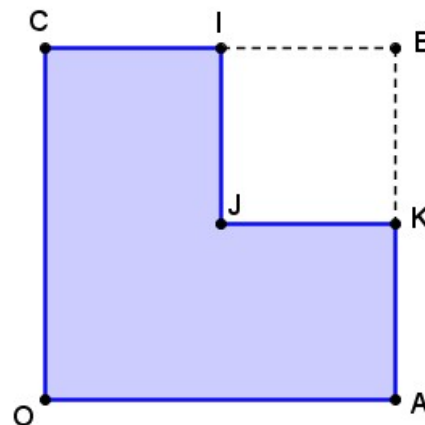
**Exercice 25 :****Centre d'inertie**

Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie.

**Exercice 26 :****Centre d'inertie**

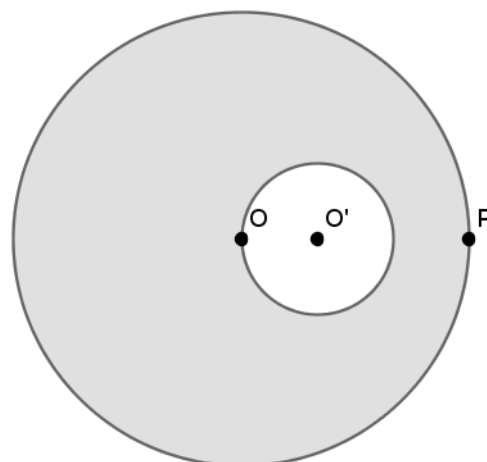
Une plaque homogène  $P$  est constituée par un carré  $OACB$  de côté 8 cm dont on a retiré le carré  $BIJK$  de côté 4 cm.

Trouver la position du centre d'inertie de la plaque par deux méthodes.

**Exercice 27 :****Centre d'inertie**

Une rondelle a la forme d'un disque évidé suivant le schéma ci-contre pour lequel  $OP = 3OO'$ .

1. Trouver la position du centre d'inertie  $I$  de la rondelle évidée.
2. On note  $M$  la masse de la rondelle évidée. Quelle masse  $m$  doit-on placer en  $P$  afin que l'ensemble constitué de la rondelle et du point "massique"  $P$  ait  $O$  pour centre d'inertie ?



**Exercice 28 :****Centre d'inertie**

On considère une plaque homogène composée d'un carré de côté 10 cm surmonté d'un rectangle de hauteur 10 cm et de longueur  $\ell$  (exprimée en cm) tel que  $\ell \geq 10$  (figure ci-contre)

Déterminer la longueur maximale  $\ell_{max}$  pour laquelle la plaque reste en équilibre sur la base  $[AB]$ .

