

Suites Numériques

Généralités sur les suites

EXERCICE 1

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_4

$$1) \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$$

EXERCICE 2

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis **conjecturer une formule explicite** du terme général. Retrouver alors u_0 à partir de la formule conjecturée puis démontrer la relation donnée entre u_{n+1} et u_n .

$$1) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + u_n} \end{cases}$$

EXERCICE 3

Pour les exercices suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

$$1) u_n = 2n^2 - n \quad 4) u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n$$

$$2) u_n = \frac{n+3}{2n+1} \quad 5) u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$$

$$3) u_n = (n-5)^2, \quad n \geq 5 \quad 6) u_n = \frac{2^n}{n}, \quad n \geq 1$$

EXERCICE 4

- 1) Définir par récurrence la suite u définie par le programme ci-dessous.
- 2) Dans cette question, on prend $a = 2$

- a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductible puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} .
- b) Écrire ce programme sur votre calculatrice puis donner une approximation du terme u_{10} .
- c) Que semble calculer la suite (u_n) ?

```
def u(a, n):
    u=1
    for i in range(1, n+1):
        u = 1/2*(u+a/u)
    return u
```

- 3) Prendre plusieurs valeur de a , par exemple 3, 4, 9, 25, et indiquer le terme u_{10} qui permet de confirmer votre conjecture.

Cette suite s'appelle la suite de Héron (Héron d'Alexandrie 1^{er} siècle apr J.-C.).

Suite arithmétique

EXERCICE 5

Pour les exercices suivant préciser si la suite (u_n) est arithmétique ou non

1) $u_n = 2n + 3$

3) $u_n = n^2 - n$

2) $u_{n+1} = \frac{3n+1}{2}$

4) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$

EXERCICE 6

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

1) $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r puis u_{2020}

2) $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r puis u_{20}

3) $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculer r puis u_0 .

EXERCICE 7

Avec une suite auxiliaire

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$

1) Calculer $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.

2) Pour tout n on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Calculer $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.

3) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Exprimer alors u_n en fonction de n .

EXERCICE 8

1) Démontrer que la somme : $1 + 3 + 5 + \dots + 99$ est le carré d'un naturel.

2) Calculer, en fonction de n , la somme des n premiers naturels impairs

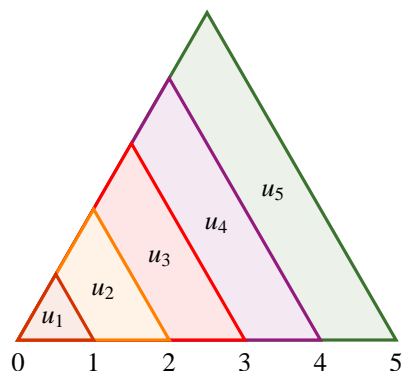
$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

EXERCICE 9

La figure ci-dessous, indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.

1) Prouver que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?

2) La suite (v_n) des périmètres est-elle arithmétique ?



On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut : $h = \frac{\sqrt{3} a}{2}$

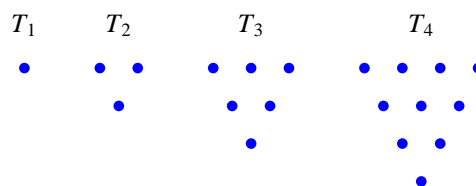
EXERCICE 10

- 1) Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.
- 2) Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 5 inférieurs à 9 999.
- 3) Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels inférieurs à 2 154 ayant 3 comme chiffre des unités.

EXERCICE 11**Nombres triangulaires**

Voici les quatre premiers nombres triangulaires :

- 1) Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6 .
- 2) Écrire une fonction, notée triangle, en Python, en mode itératif et en mode récursif, permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque T_n .



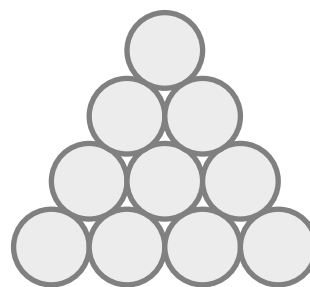
Donner les valeurs de T_{12} et T_{60} .

- 3) Retrouver ces résultats par le calcul.
- 4) Écrire un algorithme sur la calculatrice permettant de trouver les valeurs de n telles que :
 $T_n \geq 100$ puis $T_n \geq 1000$.
- 5) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 12

Des tuyaux sont rangés comme indiqué ci-contre :

- 1) Quel est le nombre total de tuyaux dans un empilage de 5 couches ? 12 couches ?
- 2) On a stocké 153 tuyaux, combien y a-t-il de couches ?
- 3) Pour ranger 200 tuyaux, combien faut-il de couches ? Combien reste-t-il de tuyaux ?

**EXERCICE 13**

(u_n) est une suite arithmétique de raison r , de premier terme u_1 et de n -ième terme u_n .

On note $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

- 1) Calculer u_1 et S_{17} lorsque : $u_{17} = 105$ et $r = 2$
- 2) Calculer u_1 et u_{33} lorsque : $r = -7$ et $S_{33} = 0$
- 3) Calculer n et u_1 lorsque : $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1176$

EXERCICE 14**Nombres pyramidaux**

On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous. On représentera un nombre par le numéro de la ligne qui le contient et par son rang dans la ligne à partir de la gauche. Par exemple, 6. Le nombre 6 est au second rang de la troisième ligne. Dans quelle ligne se trouve le nombre 2 019 ? Quel est son rang dans cette ligne ?

			1					
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

EXERCICE 15**Forage**

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- le premier mètre coûte 1 000 euros.
- Le second mètre coûte 1 050 euros et chaque mètre supplémentaire coûte 50 euros de plus que le précédent.
- On dispose d'un crédit de 519 750 €.

- 1) Proposer un programme permettant de connaître la profondeur du forage.
- 2) On appelle (u_n) la suite telle que $u_1 = 1\,000$ et u_n représente de coût du n^{e} mètre.
 - a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer alors u_n en fonction de n .
 - b) Montrer que le nombre de mètres n que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie : $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$
 - c) Retrouver le résultat de la question 1)

EXERCICE 16

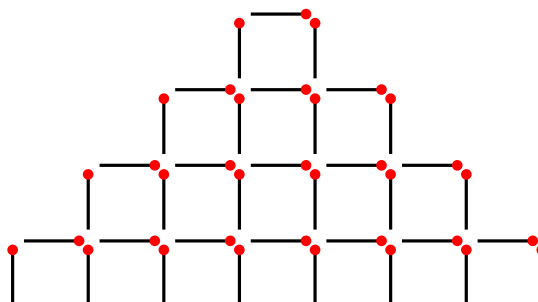
Un cycliste effectue cinq tours de piste en 2 minutes 40 secondes. Sachant qu'à chaque tour, il a mis une seconde de plus qu'au précédent, déterminer le temps mis pour chaque tour.

On donnera une résolution à l'aide d'une suite puis une résolution arithmétique

EXERCICE 17**Histoire d'allumettes**

En posant des allumettes de même longueur sur une table, on réalise une figure plane donnée sur la figure ci-dessous.

Combien d'étages peut-on construire avec 10 440 allumettes ? On proposera un algorithme puis on vérifiera le résultat par le calcul.

**EXERCICE 18**

On donne le programme ci-contre.

- 1) Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la suite utilisée dans ce programme.
- 2) Préciser le but de ce programme puis donner le résultat obtenu.
- 3) Retrouver ce résultat par le calcul

```
def u(n):
    u=1
    s=0
    for i in range(1,11):
        u=u+3
        s=s+u
    return s
```

Suite géométrique**EXERCICE 19**

Pour les exercices suivants, préciser si la suite est géométrique ou non.

- 1) $u_n = 5^{n+3}$
- 2) $u_n = \frac{2n+3}{3}$
- 3) $u_n = 3^n + 3n$
- 4) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 5u_{n+1} - 2u_n = 1$

EXERCICE 20

Pour les exercices suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison q .

- 1) $u_0 = 4$ et $q = 5$. Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) $u_4 = 8$ et $q = 2$. Calculer u_2 et u_6 .
- 3) $u_5 = 10$ et $q = -\frac{1}{2}$. Calculer u_0 et u_{10} .
- 4) $u_5 = 64, u_7 = 256, q > 0$. Calculer q puis u_{10}
- 5) $u_5 = 486, u_7 = 4\,374, q > 0$. Calculer u_0 et u_{10} .

EXERCICE 21

Pour les exercices suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison q .

- 1) Pour tout naturel n , on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Tous les termes sont non nuls et sa raison q est positive. Trouver q .
- 2) (u_n) est une suite géométrique croissante dont les termes sont négatifs. Son premier terme est u_1
 - a) Que peut-on dire de sa raison ?
 - b) On sait que $u_1 \times u_3 = \frac{4}{9}$ et $u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{19}{9}$.
Calculer u_1, u_2 et u_3 .
 - c) Calculer u_n en fonction de n .

EXERCICE 22**Avec une suite auxiliaire**

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .
- 2) Pour tout naturel n , on pose $v_n = u_n + 5$.
Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 .
- 3) Prouver que la suite (v_n) est géométrique. Exprimer alors u_n en fonction de n .

EXERCICE 23**Somme de termes**

- 1) Calculer : $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^7$
- 2) Calculer : $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1\,048\,576}$
- 3) Calculer : $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{6\,561}$
- 4) Calculer : $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^7}$

EXERCICE 24

(u_n) est une suite géométrique, $u_{10} = 25$ et $u_{13} = 200$.

- 1) Calculer u_0 et la raison q .
- 2) Calculer $S = u_{10} + u_{12} + u_{14} + \dots + u_{20}$

EXERCICE 25

- 1) Vérifier que la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par : $w_n = 2^n - 2n + 2$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) a) Prouver que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = -2n + 2$ est arithmétique.
b) Prouver que la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = 2^n$ est géométrique.
- 3) Calculer alors la somme : $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$

Limite d'une suite**EXERCICE 26**

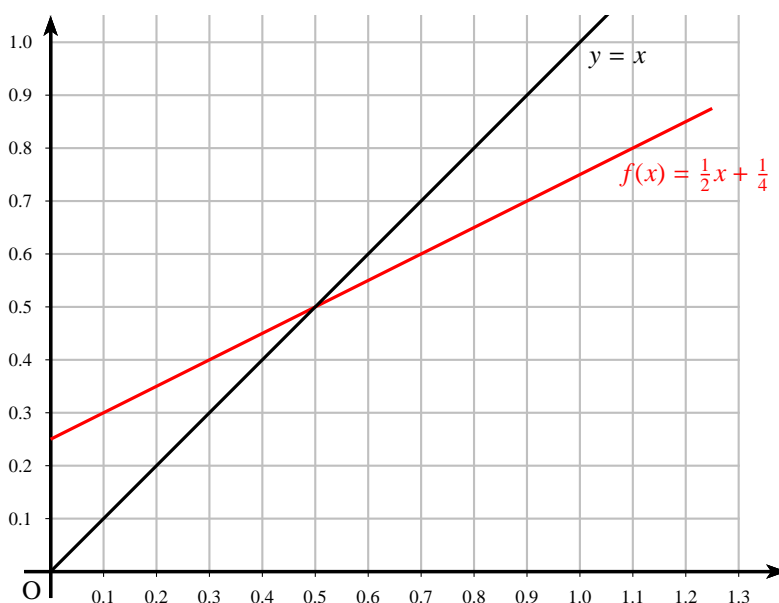
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$

- 1) A l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) pour les grandes valeurs de n .
On prendra comme fenêtre : $X \in [0; 1]$ et $Y \in [0; 0,5]$
- 2) On pose : $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.
Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Donner son premier terme et sa raison.
- 3) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- 4) En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 27

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$.

- 1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-dessous.
Conjecturer alors limite de la suite (u_n) .

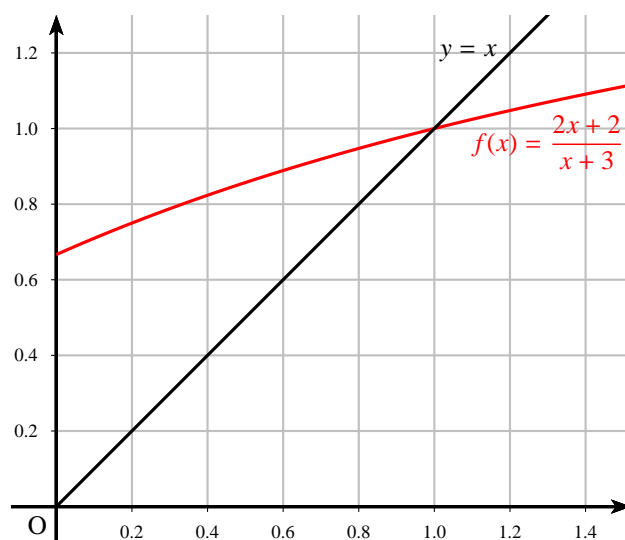


- 2) On pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.
 - a) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
 - b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
 - c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 28

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

- 1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-dessous.
Conjecturer alors limite de la suite (u_n) .



- 2) On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
- Prouver que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique.
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - Quelle est la limite de (v_n) ? En déduire la limite de (u_n) .

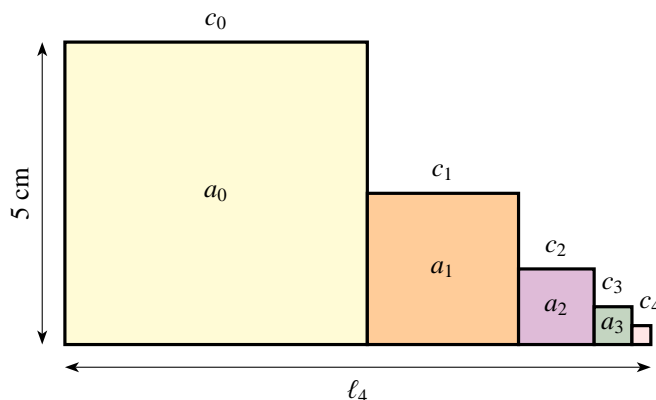
EXERCICE 29

Avec des carrés

n carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous (réalisé avec 5 carrés). Le côté d'un carré vaut la moitié du précédent.

Le premier carré a pour côté $c_0 = 5$ cm et pour aire a_0 .

On pose $\ell_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$ et $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

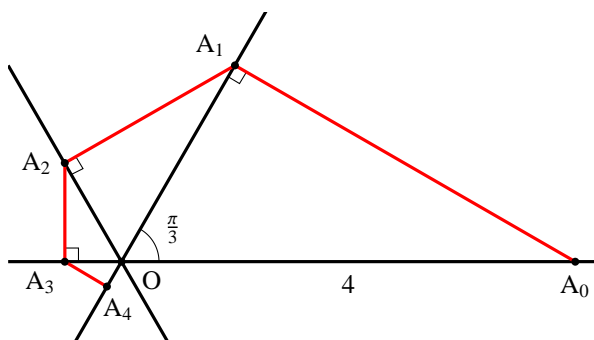


- Calculer les cinq premiers termes des suites (ℓ_n) et (s_n) . On pourra s'aider éventuellement d'un algorithme.
- Exprimer ℓ_n et s_n en fonction de n .
 - Existe-t-il un entier p tel que $\ell_p \geq 10$?
 - Donner la limite (éventuelle) de chacune des suites (ℓ_n) et (s_n) .

EXERCICE 30

Construction géométrique

Les deux droites issues de O font des angles de $\frac{\pi}{3}$ et la mesure de OA_0 est 4.



On définit la suite (u_n) par : $u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$

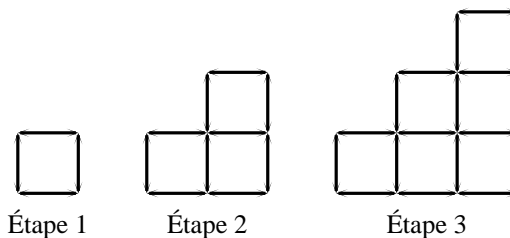
- On pose $v_n = A_{n-1}A_n$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et l'on précisera la raison et le premier terme v_1 .
- Calculer u_n en fonction de n .
- Quelle est la limite de la suite (u_n)

Motifs géométriques

EXERCICE 31

On construit successivement, la figure suivante à l'aide de segments identiques :

- Calculer le nombre de segment nécessaires aux étapes 4 et 5.



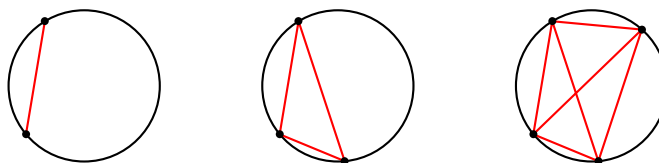
- Montrer qu'à l'étape n , le nombre de segments nécessaires S_n peut se mettre sous la forme :

$$S_n = 4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 2)$$

- Calculer S_n en fonction de n puis calculer S_{10} .
- Déterminer un algorithme permettant de donner le nombre d'étapes maximum k que l'on peut construire avec un nombre de segments n donné.
 - Combien d'étage peut-on construire avec 1 200 segments ?
Combien restera-t-il de segments ?

EXERCICE 32

On place sur un cercle n points distincts et l'on s'intéresse au nombre p_n de segments ayant pour extrémité deux de ces points.



- Déterminer les valeurs de p_3 , p_4 et p_5 .
- n points sont placés et les p_n segments étant tracés, on ajoute un nouveau point distinct des précédents. Combien de nouveaux segments peut-on tracer ?
En déduire une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
-

En écrivant les lignes :

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = p_2 + \dots$$

$$p_4 = p_3 + \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$p_n = p_{n-1} + \dots$$

et en additionnant termes à termes, déterminer p_n en fonction de n

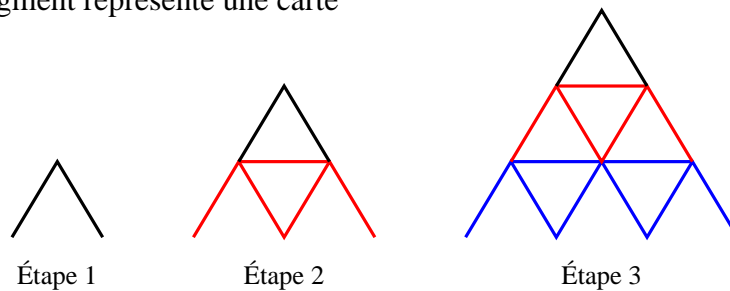
- 4) On voudrait connaître le nombre de points nécessaires pour tracer 1 035 segments. Pour cela, on écrit l'algorithme suivant :

Recopier puis compléter l'algorithme puis donner la valeur que renvoie l'algorithme

```
p=1
n=2
while ..... :
    p=p+n
    n=n+1
print (...)
```

EXERCICE 33

On construit des châteaux de cartes de plus en hauts comme indiqués sur la figure ci-dessous. Un segment représente une carte



- 1) Calculer le nombre de cartes nécessaires pour les étapes 4 et 5.
- 2) Montrer qu'à l'étape n le nombre de cartes nécessaires S_n peut se mettre sous la forme :

$$S_n = 2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)$$

- 3) Calculer S_n en fonction de n puis déterminer S_{10} .
- 4) On donne l'algorithme suivant qui détermine le nombre d'étages maximum k que l'on peut construire avec un nombre de cartes n donné.

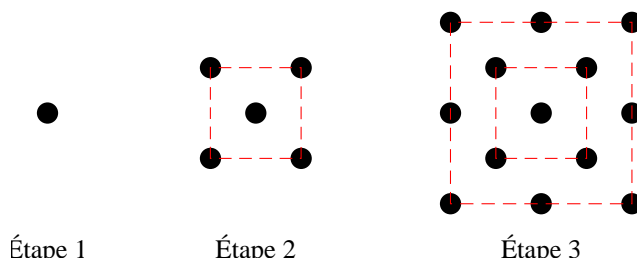
- a) Expliquer la condition sur la boucle "while".
- b) Combien d'étages peut-on construire avec 1200 cartes ?
Combien restera-t-il de cartes ?

```
def u(n) :
    u=1
    s=2
    while s+3*u+2<=n :
        n=n+1
        s=s+3n-1
    return n
```

EXERCICE 34

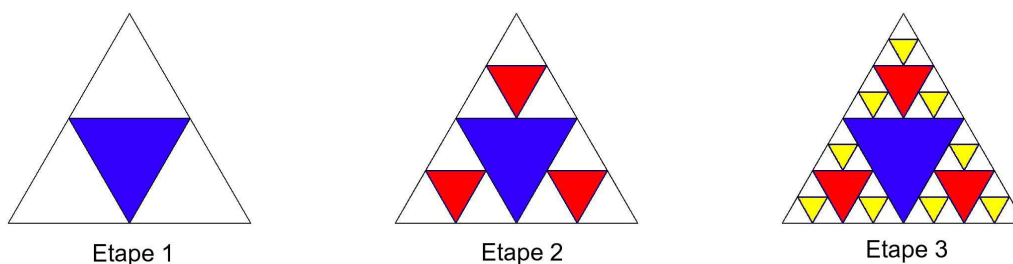
Une disposition en quinconce (du latin quincunx, par 5) est un arrangement de cinq unités, comme celui que l'on voit sur un dé : quatre arrangés en carré, un au centre. Par reproduction du motif, une disposition en quinconce est une disposition répétitive d'éléments, ligne à ligne, où une ligne sur deux est en décalage de la moitié d'un élément par rapport à la ligne qui la précède ou qui la suit.

On donne la construction des points en quinconce à l'intérieur de carrés :



On appelle p_n le nombre de points à l'étape n .

- 1) a) Représenter la structure à l'étape 4. Donner les valeurs de p_1 , p_2 , p_3 et p_4 .
 b) Établir une relation de récurrence entre les termes p_{n+1} et p_n .
- 2) a) En remarquant que $p_n = 1 + 1 \times 4 + \dots + (n-1) \times 4$, montrer que $p_n = 2n^2 - 2n + 1$.
 b) Quel est le plus grand nombre p_n que le peut construire avec 2 000 points.

Structures fractales**EXERCICE 35****Les triangles de Sierpinski**

On part d'un triangle équilatéral de côté 10.

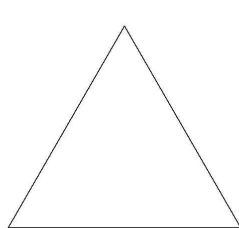
A chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral (non colorié), le triangle équilatéral (colorié) ayant pour sommets les milieux des côtés.

On s'intéresse à l'aire S_n et au périmètre P_n de la surface coloriée à la $n^{\text{ième}}$ étape.

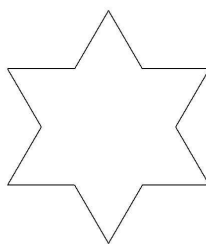
- 1) a) Expliquer pourquoi, quel que soit l'entier n , $S_n \leq 25\sqrt{3}$
 b) Conjecturer le sens de variation de S_n et de P_n , et leurs limites éventuelles.
- 2) Exprimer S_n et P_n en fonction de n puis déterminer, si elles existent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

EXERCICE 36**Le flocon de Von Koch (1870 - 1934)**

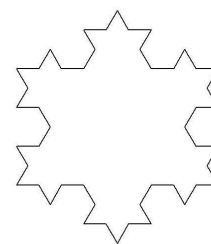
Soit un triangle équilatéral de côté a (étape 1). Sur chaque côté, on considère deux points qui partagent ce côté en trois parties de même longueur. Sur chaque côté, on obtient ainsi trois segments ; sur le segment central, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral en supprimant le segment central. On obtient un polygone (étape 2). On réitère la processus (étape 3) autant de fois que l'on souhaite.



Etape 1



Etape 2



Etape 3

On note C_n le polygone obtenue à la $n^{\text{ième}}$ étape. On note p_n le périmètre de C_n et A_n l'aire de C_n .

- 1) Exprimer p_n en fonction de n . La suite (p_n) admet-elle une limite ?
- 2) Exprimer A_n en fonction de n . La suite (A_n) admet-elle une limite ?
- 3) Quelle conclusion peut-on donner à ces polygones ainsi formés en ce qui concerne leur aire et leur périmètre.

Fractions continues**EXERCICE 37**

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

- 1) Calculer les valeurs exactes de : u_1, u_2, u_3 .
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
- 3) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n . Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	5	10	20	50
u_n				

- 4) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 38

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

- 1) Calculer les valeurs exactes de : u_1, u_2, u_3 .
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
- 3) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n . Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	5	10	20	50
u_n				

- 4) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 39

Suite récurrentes à deux termes.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

- 1) a) Déterminer un algorithme permettant de calculer u_n , n étant donné.
- b) Programmer cet algorithme sur votre calculette puis remplir le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	2	5	10	50
u_n				

- c) Conjecturer la limite de la suite.
- 2) a) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique.
- b) Exprimer v_n en fonction de n .
- 3) a) Montrer que : $u_n = 2(1 - 0,5^n) + 1$.
- b) Retrouver la conjecture du 1.c)
- 4) Déterminer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier p tel que pour $n \geq p$: $|u_n - 3| < 10^{-6}$

EXERCICE 40

Négociation

Pierre essaie de vendre sa vieille voiture 1000 € à Paul. Paul trouve ce prix trop cher et lui propose 500 €. Pierre décide de couper la poire en deux et lui propose alors 750 €. Paul tient alors le même raisonnement et lui propose 625 €. Et ainsi de suite ... Vont-ils finir par se mettre d'accord ?

On pose $u_0 = 1000$ la 1^{re} proposition de Pierre et $u_1 = 500$ la 1^{re} proposition de Paul.

- 1) Exprimer la proposition u_{n+2} en fonction des 2 propositions précédentes u_{n+1} et u_n .
- 2) Programmer cette suite sur votre calculatrice. Vers quel prix Pierre et Paul vont-ils tomber d'accord ?