Compléments sur la valeur absolue

1 Équations du type $|u(x)| = |v(x)|$

Égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x - 1| = |5 - x|$

$$2x - 1 = 5 - x \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -5 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

Graphiquement : Il faut tracer les fonctions $f(x) = |2x - 1|$ et $g(x) = |5 - x|$

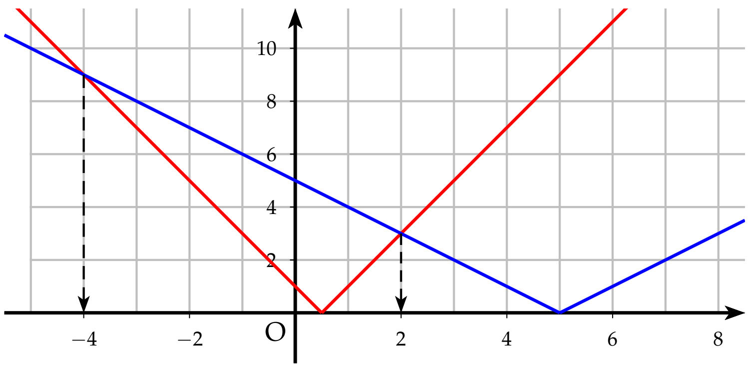
Il faut alors trouver les différentes formes des fonctions f et g. On détermine les valeurs frontières c'est à dire les valeurs de x qui annulent les fonctions f et g.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\lvert 2x-1 \rvert$		$-2x+1$	0	$2x-1$	

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	0	$-$	
$\lvert 5-x \rvert$		$5-x$	0	$5+x$	

On obtient alors les représentations suivantes avec les solutions (abscisses des points d'intersection)

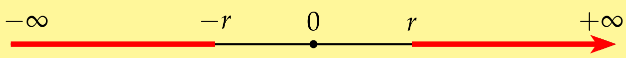


2 Inéquation du type $|u(x)| < r$ et $|u(x)| > r$

Soit $r > 0$

- **Infériorité :** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r$

- **Supériorité :** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > r \quad \Leftrightarrow \quad x < -r \ \text{ou} \ x > r$



Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

1) $|5x-2| < 3 \;\Leftrightarrow\; -3 < 5x-2 < 3 \;\Leftrightarrow\; -1 < 5x < 5 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{1}{5} < x < 1$

$S = \left] -\dfrac{1}{5}, 1 \right[$

2) $|3-2x| \geqslant 5 \;\Leftrightarrow\; 3-2x \leqslant -5$ ou $3-2x \geqslant 5 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant 4$ ou $x \leqslant -2$

$S =]-\infty\,;-2] \cup [4\,;+\infty[$

3 Autre type d'équation et d'inéquation

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|-3x+4| + |-5+x| = 10 \quad (E_1)$

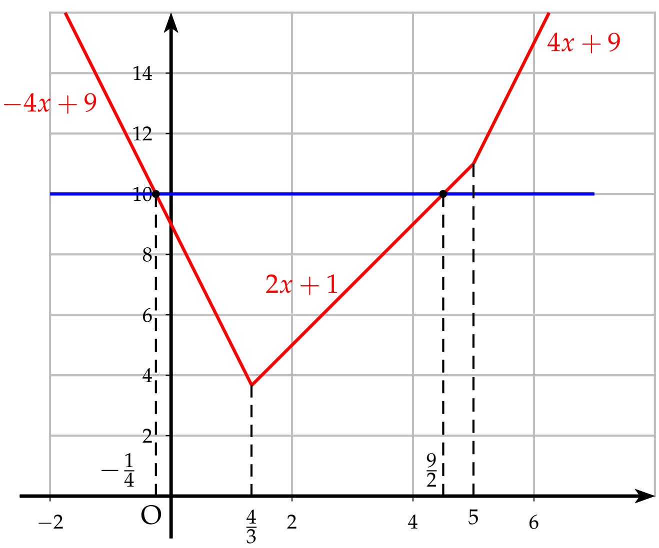
- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$$-3x+4=0 \;\text{ et }\; -5+x=0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{4}{3} \;\text{ et }\; x=5$$

- On remplit un tableau de forme : $S = \left\{ -\dfrac{1}{4} ; \dfrac{9}{2} \right\}$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x+4 \rvert$		$+$ $-3x+4$	0	$-$ $3x-4$	11	$-$ $3x-4$	
$\lvert -5+x \rvert$		$-$ $5-x$	$\frac{11}{3}$	$+$ $5-x$	0	$+$ $-5+x$	
(E_1)		$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$ possible		$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$ possible		$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$ impossible	

- Résolution graphique :



2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|2x-1| \leqslant |x+2| \quad (E_2)$

- Comme les deux quantités sont positives, on peut élever au carré :

$$(2x-1)^2 \leqslant (x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)^2 - (x+2)^2 \leqslant 0 \quad \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} \quad (x-3)(3x+1) \leqslant 0$$

On prend à l'intérieur des racines : $S = \left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ 3\right]$

- Résolution graphique :