Produit scalaire
Géométrie repérée

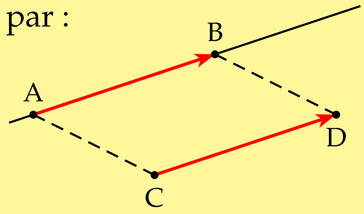
Table des matières

1 Rappels sur les vecteurs

1.1 Définition

Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une direction (la droite (AB)).
- un sens (de A vers B)
- Une longueur : $\|\vec{u}\|$ ou AB norme du vecteur



Égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC parallélogramme.

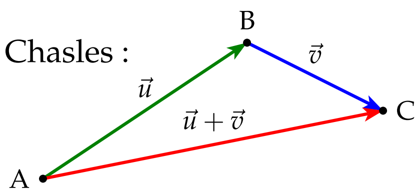
1.2 Opérations sur les vecteurs

1.2.1 Somme de deux vecteurs

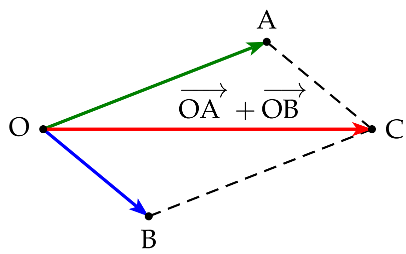
La somme de deux vecteurs est définie par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Inégalité triangulaire : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$



Construction de la somme de deux vecteurs de même origine.
On trace un parallélogramme, afin de reporter le deuxième vecteur permettant d'appliquer la relation de Chasles.



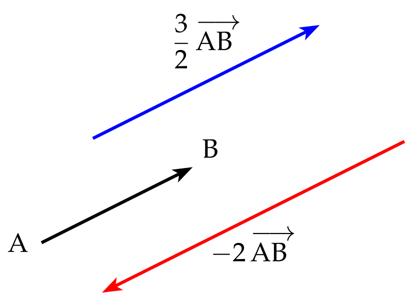
Propriété 1 : Somme de deux vecteurs :

- Commutativité : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- Associativité : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- Élément neutre $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
- Opposé $-\vec{u}$: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

1.2.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel k, appelé scalaire, le vecteur ainsi formé $k\vec{u}$ est tel que :

- Sa longueur est multiplié par $|k|$
- Si $k > 0$ son sens est inchangé
- Si $k < 0$ son sens est inversé.
- Si $k = 0$ on a : $0\,\vec{u} = \vec{0}$



Propriété 2 : **Bilinéarité**. La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs ou la somme de deux réels.

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

1.3 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur car : $\vec{0} = 0\,\vec{u}$

Propriété 3 : La colinéarité permet de montrer le parallélisme et l'alignement.

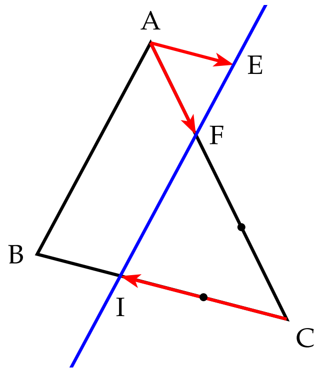
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) // (CD)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B, C alignés

Exemple : Soit ABC un triangle, E, I et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que I, E et F sont alignés.



Exprimons $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

  On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$ donc que AEIB est un parallélogramme. On a alors : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

  On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$ donc que AEIB est un parallélogramme. On a alors : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$

- De plus : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On en déduit alors : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.

1.4 Géométrie analytique

Propriété 4 : Mis à part les calculs de distance qui exige un repère orthonormé, les formules suivantes sont valable dans tout repère.

- Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \quad ; \quad y_B - y_A)$$

- Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du milieu I de [AB] vérifient :

$$I = \left(\frac{x_B + x_A}{2} \quad ; \quad \frac{y_B + y_A}{2}\right)$$

- On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$, le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est nul

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

- Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}(x;y)$ et la distance entre les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ vérifient :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemples : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Soit $A(1\,;4)$ et $B(-5\,;2)$.
   Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, du milieu de [AB] et la longueur AB

   $\overrightarrow{AB} = (-5-1\ ;\ 2-4) = (-6\ ;\ -2)$ et $I = \left(\dfrac{1-5}{2}\ ;\ \dfrac{4+2}{2}\right) = (-2\ ;\ 3)$

   $AB = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

2) On donne $\vec{u}(2\ ;\ 3)$ et $\vec{v}(3\ ;\ 4)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

   $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0.$ les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Dans un repère quelconque

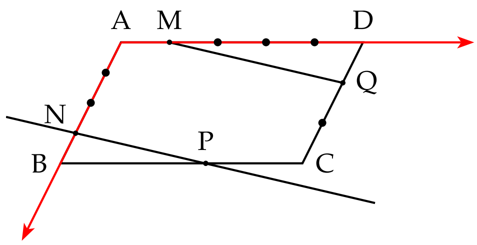
ABCD est un parallélogramme. M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe BC en P.
Déterminer le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:
Les coordonnées de M, N et Q sont :

$$\mathrm{M}\left(0; \frac{1}{5}\right), \quad \mathrm{N}\left(\frac{3}{4}; 0\right), \quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{3}; 1\right)$$



P est sur (BC), son abscisse est 1.

De plus comme k est tel que : $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$, son ordonnée vaut k.
Les coordonnées de P sont : $\mathrm{P}(1; k)$

Comme (NP) // (MQ), le déterminant de $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ est nul, on a :

$$\det(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{NP}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - 0 & 1 - \frac{3}{4} \\ 1 - \frac{1}{5} & k - 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{3} - \frac{1}{5} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{k}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

2 Produit scalaire

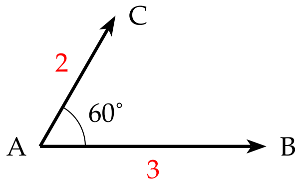
2.1 Définition

Définition 3 : On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos 60°$$
$$= AB \times AC \cos 60° = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

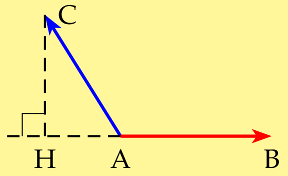


Définition 4 : Vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors

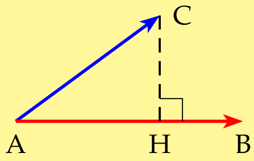
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sens contraire :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ même sens :



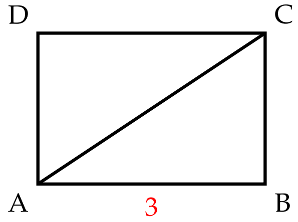
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

Remarque :

- Si $(\vec{u}, \vec{v}) < \dfrac{\pi}{2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
- Si $(\vec{u}, \vec{v}) > \dfrac{\pi}{2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
- Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$, le vecteur $\overrightarrow{AH} = \vec{0}$ alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple : Soit ABCD un rectangle tel que AB = 3.
Le point C se projette orthogonalement en B noté $\mathrm{C} \xrightarrow{\perp} \mathrm{B}$ donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 9$$



2.2 Propriétés

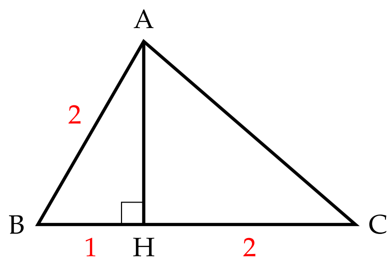
Propriété 5 : Le produit scalaire est un forme bilinéaire symétrique :

- symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- bilinéarité : pour tous réels a et b :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad \text{et} \qquad (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Remarque : Ces propriétés permettent d'effectuer des opérations sur le produit scalaire comme le produit et la somme de quantités algébriques.
C'est une sorte de distributivité.

Exemple : En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :



$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{AB} &= AB^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (\mathrm{B} \xrightarrow{\perp} \mathrm{H}) \\
&= AB^2 + AH^2 \\
&= AB^2 + (AB^2 - BH^2) \quad \text{th de Pythagore} \\
&= 2AB^2 - BH^2 \\
&= 2 \times 4 - 1 = 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (\mathrm{B} \xrightarrow{\perp} \mathrm{H}) \\
&= AH^2 + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} \\
&= (AB^2 - BH^2) - HC \times HB \quad \text{th de Pythagore et colinéarité} \\
&= 4 - 1 - 2 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

Propriété 6 : Colinéarité et orthogonalité

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraires
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux

Remarque : On écrit : $\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

2.3 Autres définitions

2.3.1 Définition par la norme

Définition 5 : Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarque : Cette définition mesure le défaut d'orthogonalité de deux vecteurs. En effet si le triangle ABC est rectangle en A, alors $\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = 0$

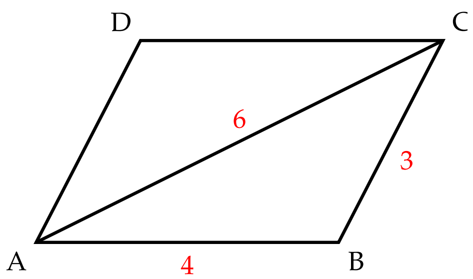
Démonstration : Cette définition découle de la bilinéarité :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{u}\|^2$$

d'où $\quad 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Exemple : ABCD parallélogramme tel que : AB = 4, BC = 3 et AC = 6.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= \left(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AD}||^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^{\,2} - \overrightarrow{AB}^{\,2} - \overrightarrow{AD}^{\,2}\right)\\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AD}^2)\\
&= \frac{1}{2}(36 - 16 - 9) = \frac{11}{2}
\end{aligned}$$



2.3.2 Définition analytique

Définition 6 : Dans un **repère orthonormé** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ est égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' \quad \overset{\text{notation matricielle}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Démonstration : Définition est équivalente à la définition par la norme.

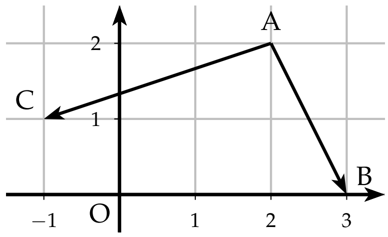
On rappelle que pour un vecteur $\vec{u}(x\,;\,y)$ alors : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

Calculons $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en revenant à la définition par la norme :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)\\
&= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'
\end{aligned}$$

Exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}3-2\\0-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-2\\1-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}\\
&= 1\times(-3) + (-2)\times(-1) = -1
\end{aligned}$$



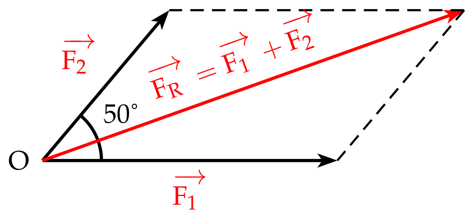
2.4 Application à la physique

2.4.1 Résultante de deux forces

Un point O est soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui forme un angle de 50°.

Les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N.

Calculer l'intensité de la force résultante F_R



Le produit scalaire de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ vaut : $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2} = F_1\times F_2\cos 50°$

Par la norme : $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2} = \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}||^2 - F_1^2 - F_2^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(F_R^2 - F_1^2 - F_2^2\right)$

En égalisant les deux formes :

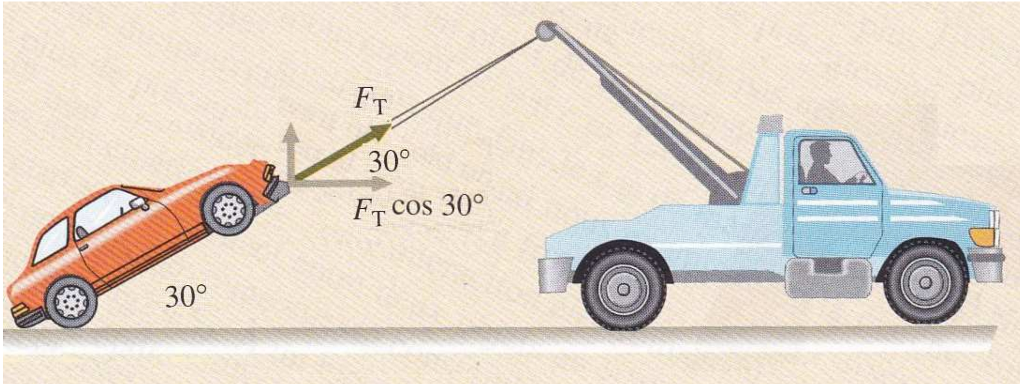
$$\frac{1}{2}\left((F_R^2 - F_1^2 - F_2^2\right) = F_1\times F_2\cos 50° \quad\Leftrightarrow\quad F_R^2 = 2F_1\times F_2\cos 50° + F_1^2 + F_2^2$$

$$F_R = \sqrt{2F_1\times F_2\cos 50°+F_1^2+F_2^2} = \sqrt{2\times 300\times 200\cos 50°+300^2+200^2} \approx 455,12\text{ N}$$

2.4.2 Travail d'une force

Le travail W d'une force $\overrightarrow{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{\ell}$.

$$W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\ell}$$



Une dépanneuse remorque une voiture en panne. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30°avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si elle la remorque sur une distance de 500 m sur cette route en pente.

$$\mathrm{W} = \overrightarrow{\mathrm{F}_T} \cdot \overrightarrow{\ell} = \mathrm{F}_T \times \ell \cos 30° = 1600 \times 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 400\sqrt{3} \times 10^3 \ \mathrm{J} \approx 692,82 \ \mathrm{kJ}$$

2.5 Relation d'Al-Kashi

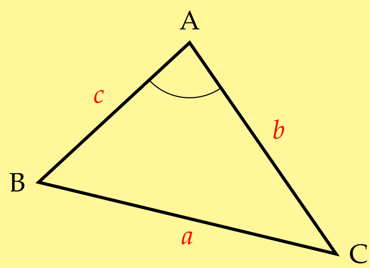
Cette relation a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle, il s'agit de la généralisation du théorème de Pythagore.

Théorème 1 : Soit un triangle ABC. On a :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \cos \widehat{\mathrm{A}}$$

Avec a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{\mathrm{A}}$$



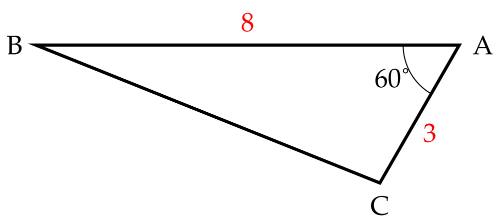
Démonstration : On part de la relation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2 = (\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})^2 \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 \\ &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AC} \times \mathrm{AB} \cos \widehat{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Remarque : Si $\widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{\pi}{2}$ on retrouve le théorème de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$

Exemple : Déterminer la longueur BC et les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ du triangle ci-dessous.

D'après la figure : $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{\mathrm{A}} = 60°$.



- D'après la relation d'Al-Kashi, nous avons :
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = 3^2 + 8^2 - 2\times3\times8\times\dfrac{1}{2} = 9 + 64 - 24 = 49 \quad\Leftrightarrow\quad a = 7$
- Pour déterminer l'angle $\widehat{B}$, on effectue une **permutation circulaire** de la formule d'Al-Kashi, c'est à dire :
  $$a \to b \quad , \quad b \to c \quad , \quad c \to a \quad , \quad \widehat{A} \to \widehat{B}$$
  On obtient donc : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B} \quad\Leftrightarrow\quad 2ac\cos\widehat{B} = a^2 + c^2 - b^2$
  $$\cos\widehat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{49+64-9}{2\times7\times8} = \frac{104}{112} = \frac{13}{14}$$
  On obtient donc : $\widehat{B} = \arccos\left(\dfrac{13}{14}\right) \approx 21,7^\circ$
- Enfin, par complément à 180° : $\widehat{C} \simeq 180 - 60 - 21,79 \approx 98,21^\circ$

2.6 Ensemble de points

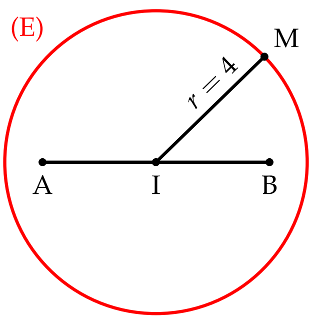
Théorème 2 : Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M on a la relation :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration : On introduit le point I dans le produit scalaire :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI}\,\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} - \underbrace{IA^2}_{\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}} = MI^2 - \frac{1}{4}\underbrace{AB^2}_{IA=\frac{1}{2}AB}\end{aligned}$$

Exemple : Déterminer l'ensemble (E) des points M tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 7$ et $AB = 6$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 7 \quad\Leftrightarrow\quad MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 7 \quad\Leftrightarrow$$
$$MI^2 = 7 - \frac{1}{4}AB^2 = 7 + 9 = 16 = 4^2$$

L'ensemble (E) est le cercle de centre I et de rayon 4.



Propriété 7 : Un cercle de diamètre [AB] est caractérisé par : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

Démonstration : En effet un point M du cercle de diamètre [AB] de milieu I est tel que : $MI^2 = \left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2 = \dfrac{1}{4}AB^2$ donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

3 Géométrie repérée

3.1 Équation cartésienne et équation réduite

Définition 7 : Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

Remarque : La droite (AB) est définie par le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Théorème 3 : Équation cartésienne d'une droite

Toute droite d du plan est déterminée par une équation de la forme :

$$d \;:\; ax + by + c = 0, \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ non tous nuls.}$$

Un vecteur directeur de la droite d est alors $\vec{u}(-b\,;\,a)$

Exemple : Soit la droite d définie par les point $A(2\,;\,3)$ et $\vec{u}(-2\,;\,1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Soit $M(x\,;\,y) \in d$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2) + 2(y-3) = 0$$
$$x + 2y - 2 - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 2y - 8 = 0$$

⚠ Une équation cartésienne n'est pas unique. On peut multiplier les coefficients de l'équation par un facteur k non nul. Par exemple, la droite d est définie par :

$$d \;:\; x + 2y - 8 = 0 \quad \overset{k=-2}{\Leftrightarrow} \quad d \;:\; -2x - 4y + 16 = 0$$

Théorème 4 : Équation réduite d'une droite

Toute droite d, non verticale, admet une équation de la forme :

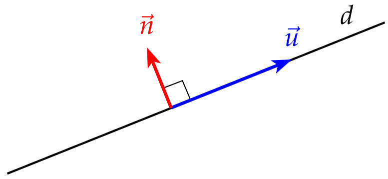
$$d \;:\; y = mx + p \quad \text{où } \vec{u}(1\,;m) \text{ est vecteur directeur de } d$$

Exemple : $d \;:\; x + 2y - 8 = 0$ admet comme équation réduite $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$

3.2 Vecteur normal à une droite

Définition 8 : Un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d. On a alors : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

Remarque : Si un vecteur $\vec{n}$ est normal à un vecteur directeur d'une droite d, il est normal à tout vecteur directeur de d



Théorème 5 : Dans un repère **orthonormé** :

- Si $d : ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a\,;\,b)$ vecteur normal à d.
- Réciproquement si un vecteur $\vec{n}(a\,;\,b)$, non nul, est un vecteur normal à une droite d, alors $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d.

Remarque : Le repère orthonormé est essentiel pour l'orthogonalité.

Démonstration : Soit $d : ax + by + c = 0$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ab = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp \vec{u}$$

Exemple : On donne la droite $d : 3x - y + 5 = 0$.

1) Déterminer une équation de la droite Δ passant par $\mathrm{A}(1\,;\,2)$ perpendiculaire à d. On proposera deux solutions.

- Si Δ est perpendiculaire à d, un vecteur normal $\vec{n}(3\,;-1)$ à d est un vecteur directeur de la droite Δ. On a alors : $\Delta : -x - 3y + c = 0$

  $\mathrm{A} \in \Delta$, ses coordonnées vérifient l'équation de Δ : $-1 - 6 + c = 0 \;\Leftrightarrow\; c = 7$

  Une équation cartésienne de Δ est : $-x - 3y + 7 = 0 \;\overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow}\; x + 3y - 7 = 0$

- Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y) \in \Delta$ et $\vec{u}(1\,;\,3)$ un vecteur directeur de d. On a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{u} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; x - 1 + 3y - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 3y - 7 = 0$$

2) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite d. En déduire la distance de A à la droite d.

Si H est le projeté orthogonal de A sur d alors, H est l'intersection des droites d et Δ.

Les coordonnées des H vérifient le système : $\begin{cases} 3x - y = -5 & (\times 3) \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} 9x - 3y = & -15 \\ x + 3y = & \;\;\;7 \\ \hline 10x + 0y = & -8 \\ x = & -\dfrac{4}{5} \end{array}$$

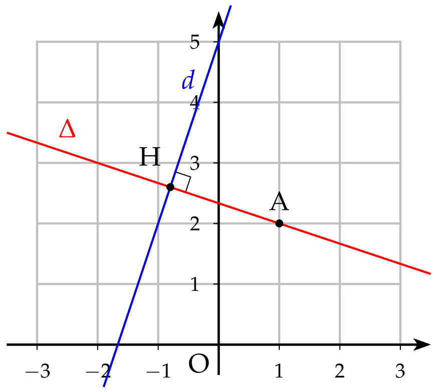
de la 1^{re} équation

$$y = 3x + 5 = -\frac{12}{5} + 5 = \frac{13}{5}$$

donc $\mathrm{H}\left(-\dfrac{4}{5}\,;\,\dfrac{13}{5}\right)$

La distance de A à la droite d est alors :

$$\text{AH} = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{13}{5}-2\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{81+9}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \approx 1,90$$



3.3 Équation d'un cercle

Théorème 6 : Dans un repère **orthonormé** :

L'équation cartésienne d'un cercle, $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon r est de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Démonstration : Soit $\text{M}(x\,;\,y) \in \mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r donc :

$$\Omega\text{M}^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemple : Montrer que l'ensemble des points $\text{M}(x;y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

est un cercle. Préciser le rayon et les coordonnées du centre.

On regroupe les "x" et les "y" : $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2$

Débuts de carrés parfaits : $(x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 = 2$

On obtient alors : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 = 2^2$

L'ensemble des points M est un cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.