Probabilité conditionnelle. Variable aléatoire

Loi de probabilité

EXERCICE 1

Dans une urne, il y a 3 boules vertes (V), 3 bleues (B) et 4 jaunes (J). On tire au hasard une boule et on note sa couleur. Y-a-t-il équiprobabilité lorsqu'on choisit comme univers :

1) {V ; R ; J} ?

2) L'ensemble des 10 boules ?

EXERCICE 2

Un dé est déséquilibré. On estime que les probabilités d'apparition des faces 2, 3, 4, 5 sont égales ; que celle de la face 6 est deux fois plus petite que chacune des précédentes ; et la probabilité de la face 1 est 0,5.
Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

EXERCICE 3

Un dé est déséquilibré de sorte que la probabilité de sortie de chacune des faces est proportionnelle à son numéro.
Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

Probabilité d'un événement

EXERCICE 4

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que :

1) $p(\text{A}) = 0,3$, $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,7$ et $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,2$. Calculer $p(\overline{\text{B}})$.

2) $p(\overline{\text{A}}) = 0,44$, $p(\overline{\text{B}}) = 0,63$ et $p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0,32$. Calculer $p(\text{A} \cap \text{B})$.

EXERCICE 5

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5. On tire deux boules au hasard, l'une après l'autre et sans remise. Ainsi, une issue est un couple $(a\ ;\ b)$ où a est le premier numéro et b le second.
On considère les événements suivants :

- A : « $a + b = 5$ »
- B : « $|a - b| = 1$ »

1) Combien y a-t-il d'issues ?

2) Calculer les probabilités suivantes :

   a) $p(\text{A})$ b) $p(\text{B})$ c) $p(\text{A} \cap \text{B})$ d) $p(\text{A} \cup \text{B})$

3) Calculer les probabilités suivantes :

   a) $p(\overline{\text{A}})$ b) $p(\overline{\text{B}})$ c) $p(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}})$ d) $p(\overline{\text{A}} \cup \overline{\text{B}})$

Exercice 6

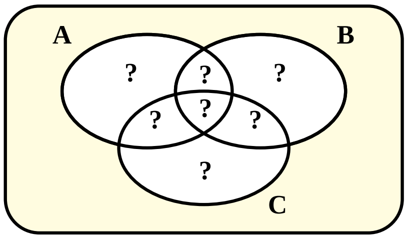
Diagramme de Venn

Trois revue scientifiques A, B et C sont mises à la disposition des élève d'un lycée. On sait que :

- 52 % ont lu A, 43 % ont lu B et 37 % ont lu C ;
- 22 % ont lu A et B, 15 % ont lu A et C et 13 % ont lu B et C ;
- 8 % ont lu les trois revues.

On interroge un élève au hasard.

1) Compléter le diagramme suivant :
mettre un nombre à la place de "?"



2) Quelle est la probabilité :
   a) Que l'élève ait lu seulement une revue ?
   b) Que l'élève n'ait lu aucune revue ?

Exercice 7

Arbre de probabilité

Dans son dressing, Paul a deux pantalons – un noir et un bleu – trois chemises – une bleue, une jaune et une noire – et deux vestes – une bleue et une marron.

1) A l'aide d'un arbre dénombrer l'ensemble de ses tenues possibles (un pantalon, une chemise et une veste).
2) On suppose que l'ensemble des tenues est muni d'une loi équirépartie. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A : « Il est habillé tout en bleu »
   - B : « Il a une chemise et une veste de couleur différente »
   - C : « Il ne porte ni pantalon noir, ni veste bleu »

Exercice 8

Tableau double entrées

Sur les 485 candidats au baccalauréat général d'un lycée, on sait que :

- 370 ont été reçus dont 212 filles.
- 40 garçons n'ont pas été reçus

On appelle
F : « le candidat est une fille » ;
G : « le candidat est un garçon » ;
R : « le candidat est reçu ».

1) Compléter le tableau suivant :

	F	G	Total
R			
$\overline{R}$			
Total			485

2) On rencontre par hasard un candidat, quelle est la probabilité que ce candidat soit :
   a) un garçon reçu ? b) une fille non reçue ? c) non reçu ?
3) On rencontre par hasard un garçon candidat. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?
4) On rencontre au hasard un élève non reçu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 9

Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants M des achats :

- 80 % des achats sont payés par chèque ;
- 70 % des achats sont d'un montant inférieur à 200 euros, dont 20 % sont réglés en espèces ;
- 2 % des clients utilisent une carte de paiement qui ne permet pas de régler des achats inférieurs à 200 euros.

1) Recopier puis complétez le tableau ci-dessous.

	$M \leqslant 200$	$M > 200$	Total
Espèces			
Chèques			
Carte			
Total			

2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : « l'achat dépasse 200 euros » ;
   - B : « l'achat dépasse 200 euros, payé en espèces » ;
   - C : « l'achat dépasse 200 euros ou l'achat est réglé en espèces ».

3) Un achat est payé en espèces.
   Quelle est la probabilité qu'il dépasse 200 € ?

4) Un achat est inférieur ou égal 200 €.
   Quelle est la probabilité qu'il soit payé en espèces ?

Exercice 10

ABCD est un tétraèdre régulier. Un scarabée se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre, et uniquement sur les arêtes. Son déplacement obéit aux règles suivantes

- le temps de parcours d'une arête est une minute ;
- à un sommet, il choisit au hasard l'une des trois arêtes ;
- le scarabée part du sommet A.

Calculez les probabilités des événements suivants :

1) A : « le scarabée repasse en A au bout de trois minutes ».
2) B : « le scarabée ne passe pas par le sommet C pendant les trois premières minutes ».

Exercice 11

Prendre toutes les initiatives

Un urne contient deux boules blanches et quatre boules rouges, indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément au hasard trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilités des événements suivants :
   - A : « Le tirage ne contient aucune boule blanche ».
   - B : « Le tirage contient une boule blanche ».
   - C : « Le tirage contient deux boules blanches ».

2) a) On tire successivement trois boules avec remise. Déterminer la probabilité des événements A, B et C définis à la question précédente.

   b) A-t-on $p(A) + p(B) + p(C) = 1$? Pourquoi ?

EXERCICE 12

Problème du chevalier de Méré

Deux joueurs Albert et Bernard jouent à jeu quelconque en trois manches. Ils misent chacun 32 pistoles. Le premier qui totalisera trois manches gagnantes reçoit les 64 pistoles jouées.
La première manche est gagnée par Albert. On doit s'arrêter là pour des raisons indépendantes de leur volonté. Comment répartir les 64 pistoles misées ?

Piste : Rendre les mises à chacun : ce ne serait pas juste : Albert a gagné une partie. On répartit alors les 64 pistoles selon l'espérance de gain des deux joueurs à ce moment du jeu. On pourra faire un arbre pour connaître la probabilité pour que Albert ait gagné si l'on avait poursuivi la partie.

Probabilités conditionnelles

EXERCICE 13

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%. L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter la tableau suivant qui décrit la composition de la commande :

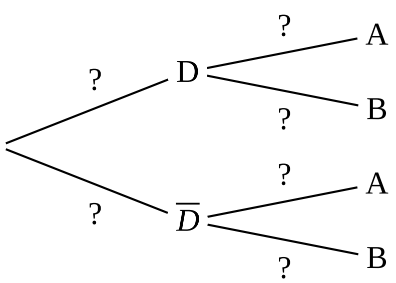
	D	$\overline{\text{D}}$	Total
A			
B			
Total			

2) Calculer les probabilités suivantes :

a) $p(\text{D})$, $p(\text{A} \cap \text{D})$ et $p_{\text{D}}(\text{A})$

b) $p(\overline{\text{D}})$, $p(\overline{\text{D}} \cap \text{B})$ et $p_{\overline{\text{D}}}(\text{B})$

c) Remplir l'arbre suivant :



EXERCICE 14

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.
3) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.
4) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Exercice 15

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : M (médecins), S (soignants non médecins) et AT (personnel administratif ou technique).

- 12% sont des médecins et 71% des soignants.
- 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ?
   Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme médecin ?
3) On sait que 80% du personnel est féminin.
   - Calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.
   - En déduire la probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne interrogée est AT.

Exercice 16

Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. Les autres dés sont parfaits.

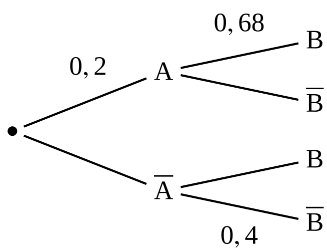
1) On prend au hasard un dé, on le lance. Calculer la probabilité de l'événement S «on obtient 6 ».
2) On prend au hasard un dé, on le lance, on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé soit pipé.

Exercice 17

Vrai-Faux

On considère l'arbre de probabilités suivant :

Affirmation : la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à 0,32.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?
On se justifiera



Exercice 18

Un entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam.
Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

1) Calculer $P(S \cap D)$.

2) On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04. Construire alors un arbre pondéré.
3) On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ? Interpréter cette valeur.

Exercice 19

Une usine fabrique des tubes.

Une étude menée sur la production a permis de constater que :

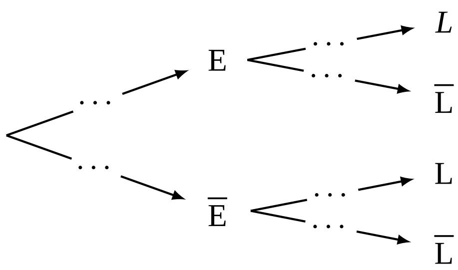
- 96 % des tubes ont une épaisseur conforme ;
- parmi les tubes qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
- 3,6 % des tubes ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube au hasard dans la production et on considère les événements :

- E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;
- L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :

1) Recopier et compléter entièrement cet arbre.
2) Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.



Exercice 20

1) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{4}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{10}$
   Calculer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.
2) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \dfrac{2}{3}$
   Calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.
3) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$
   Calculer $p(\mathrm{B})$.
4) A et B sont tels que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{4}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{2}{5}$
   a) $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
   b) Calculer $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$. En déduire $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 21

Prendre toutes les initiatives

Le quart de la population d'un pays a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\dfrac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, $\dfrac{1}{5}$ n'est pas vacciné.

1) Calculer :
   a) la probabilité qu'une personne malade soit vacciné ;
   b) la probabilité qu'une personne soit vaccinée et malade ;
   c) la probabilité qu'une personne soit malade.
2) En déduire la probabilité qu'une personne non-vaccinée tombe malade.
   Que pouvez-vous en déduire ?

Indépendance

Exercice 22

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts. On appelle :

- A : « l'appareil présente un défaut d'apparence »
- F : « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On suppose que les événements A et F sont indépendants.
La probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.

On choisit au hasard un des appareils.
Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

Exercice 23

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :
- A : « le numéro est pair » ;
- B : « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
- C : « le numéro obtenu est 3 ou 4 »

1) Calculez les probabilités de A, B, C.
2) Calculez la probabilité conditionnelle $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.
3) A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

Variable aléatoire

Exercice 24

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 25

Loterie

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble Ω de billets numérotés de 1 à 2 000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.
On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.

1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez vous ?
4) L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x, avec x compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x.

Exercice 26

Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activités : la compétition C, le loisir L et l'aquagym A. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule de ces activités. Voici la répartition des adhérents suivant l'activité choisie :

- L : 30 %
- A : 20 %
- C : 50 %

L'adhésion à la section L ou à la section A coûte 60 € tandis que l'adhésion à la section C revient à 100 € pour l'année. En outre, le club organise chaque année une journée de rencontre, notée R, pour laquelle une participation de x euros $(0 < x < 40)$ par participant est demandée. Un tiers des adhérents de L, un quart de ceux de A et la moitié de ceux de C participent à cette journée.

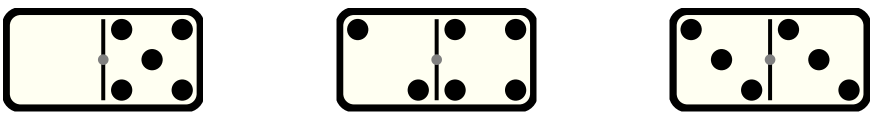
1) Compléter le tableau suivant en inscrivant les pourcentages qui conviennent.

	L	A	C	Total
R				
$\overline{\text{R}}$				
Total				100

2) On interroge au hasard un membre du club. On appelle S la variable aléatoire qui à chaque adhérent associe le montant annuel à verser au club (cotisation plus participation éventuelle à la rencontre).
   a) Quelles sont les valeurs prises par S ?
   b) Indiquer la loi de probabilité de S en fonction de x.
   c) Calculer E(S) en fonction de x.
   d) A quel prix le directeur du club doit-il fixer la participation à la journée de rencontre s'il veut que le coût moyen par adhérent ne dépasse pas 90 €.

Exercice 27

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.



1) Prouvez que le nombre de dominos est 28.
2) Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 ?

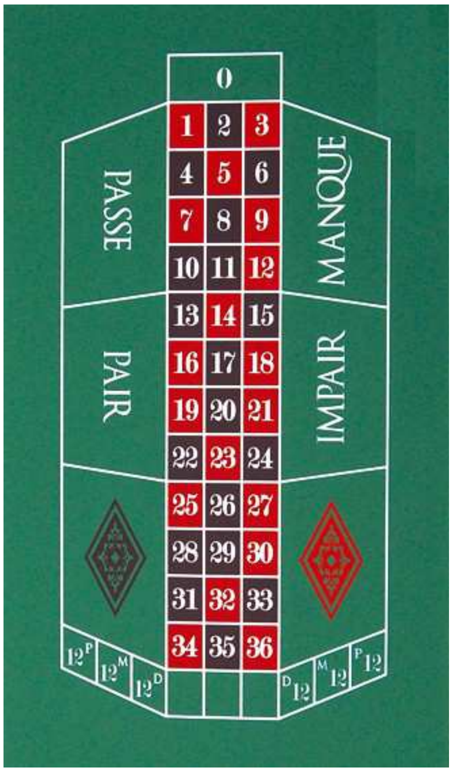
3) X est la variable aléatoire prenant la valeur -1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur n lorsqu'il obtient le double « $\{n, n\}$ ».

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculez E(X).

Exercice 28

Au jeu de la roulette, les 37 issues $0, 1, 2, \ldots, 36$ sont équiprobables.



On se propose de comparer trois stratégies de jeu.

- **Stratégie 1** : un joueur mise 10 € sur "*rouge*". Si un numéro rouge sort, il reçoit le double de sa mise ; sinon, perd sa mise.
- **Stratégie 2** : il mise 10 € sur un numéro. S'il sort, il reçoit 36 fois sa mise ; sinon, il perd sa mise.
- **Stratégie 3** : il mise 10 € sur l'événement P_{12} (première douzaine) qui correspond à la sortie de l'un des numéros $1, 2, \ldots, 12$. Si cet événement est réalisé, il reçoit le triple de sa mise ; sinon, il perd sa mise.

1) Pour chacune des stratégies :

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance.

2) Comparer les espérances et les variances. Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de "*gagner une grosse somme*" ?

Répétition d'épreuves

Exercice 29

Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible est de 0,8. Il lance une volée de trois flèches et on suppose les tirs indépendants. Quelle est la probabilité :

1) que toutes les flèches ratent la cible ? 2) qu'au moins une flèche soit dans la cible ?

Exercice 30

On lance trois fois une pièce bien équilibrée. On décide de coder Pile par 1 et Face par 0. On considère le jeu suivant :

- si 1 sort au premier lancer, on gagne 1 € ;
- sinon, s'il sort au deuxième lancer, on gagne 2 € ;
- sinon, s'il sort au troisième lancer, on gagne 4 € ;
- enfin, s'il n'est pas sorti, on perd n €.

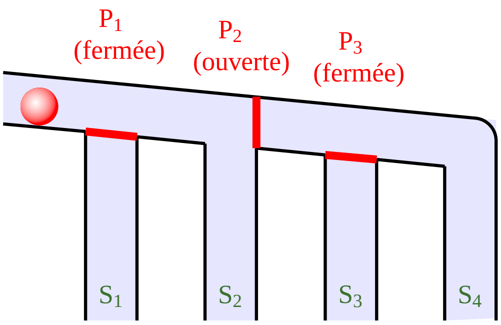
On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

1) Déterminer la loi de probabilité de G.

2) Comment choisir n pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 31

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1, P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles S_1, S_2, S_3 et S_4.
Un système électronique positionne de façon aléatoire ces trois portes en position "*ouvertes*" ou "*fermée*" indépendamment les unes des autres.



Pour jouer, on doit miser 7 €.
Si la bille sort en S_1, on ne reçoit rien, sinon, si elle sort par S_2, on reçoit 5 €, par S_3, on reçoit 10 € et par S_4, on reçoit 20 €.
X est la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer E(X).

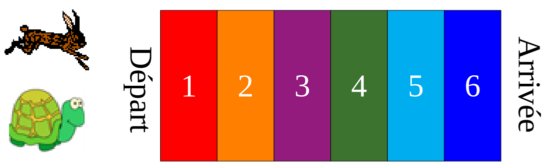
   c) Commet modifier le montant de la mise pour que ce jeu soit équitable ?

Programmation

Exercice 32

Le lièvre et la tortue

Une course entre le lièvre et la tortue est simulée par le lancer d'un dé équilibré : si le résultat est 6 le lièvre a gagné, sinon la tortue avance d'une case. Les lancers sont indépendants.
La tortue gagne si elle atteint la case n° 6 (elle a donc six case à parcourir).



1) Pourquoi la course ne peut dépasser 6 lancers ?

2) a) Écrire une fonction sans argument, notée *simul*, en python, permettant de simuler une course.

   On prendra comme variables :
   - C : le numéro de la case où se trouve la tortue ;
   - L vaut 1 si le lièvre gagne la partie et 0 si la tortue gagne la partie.
   - X : le résultat d'un lancer de dé.
   - on affichera "lievre" si le lièvre gagne et "tortue" si la tortue gagne ;

   b) Exécuter dix fois une partie puis remplir le tableau suivant :

n° de la partie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vainqueur										

   c) Entre le lièvre et la tortue, qui a plus de chance de gagner ?

3) a) Représenter par un arbre pondéré, la succession des six lancers.

   b) Quelle est la probabilité que le lièvre gagne ? Retrouver la conjecture du 2 c).

4) On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le lièvre vainqueur et 0 sinon.

   a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de N.

   b) Calculer E(N) puis interpréter ce résultat.