

SÉANCE du 27 MAI 2021

EXERCICE 1

Suite

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol. Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue à rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\frac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.

On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par la balle au n -ième rebond. On a alors $h_0 = 2$.

- 1) a) Donner h_1 et h_2 .
 - b) Pour tout entier naturel n , exprimer h_{n+1} en fonction de h_n .
 - c) En déduire la nature de la suite (h_n) . On précisera sa raison et son premier terme.
 - d) Déterminer le sens de variation de la suite (h_n) .
- 2) Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

EXERCICE 2

Fonction exponentielle

Une entreprise vend des smartphones d'un seul modèle « haut de gamme ». Le service marketing modélise le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par : $N(x) = 100 e^{-2x}$, où :

- x est le prix de vente en milliers d'euros d'un smartphone modèle « haut de gamme ». Le prix du smartphone modèle « haut de gamme » est compris entre 400 € et 2 000 € ; on a donc $x \in [0, 4 ; 2]$.
- $N(x)$ est le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus trimestriellement en millions d'unités.

- 1) Si le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone modèle « haut de gamme » à 1 000 €, quel sera le nombre de smartphones vendus trimestriellement ?
On arrondira le résultat à mille unités.

La recette trimestrielle $R(x)$ est obtenue en multipliant le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par le prix de vente. On obtient $R(x) = x \times N(x)$ en milliards d'euros.

Le coût de production en milliards d'euros en fonction du nombre de smartphones modèle « haut de gamme » fabriqués est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0,4 \times N(x)$ où x est le prix de vente en milliers d'euros.

Le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production.

- 2) Vérifier que le bénéfice trimestriel peut être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente 1 000 €.
- 3) Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x en milliers d'euros par : $B(x) = (100x - 40) e^{-2x}$.

- 4) Calculer $B'(x)$ puis étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0, 4 ; 2]$.
- 5) À quel prix faut-il vendre ces smartphones pour assurer un bénéfice maximal ?

EXERCICE 3

Probabilité conditionnelle

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert : un assortiment de macarons et une part de tarte tatin. Des études statistiques montrent que :

- l'assortiment de macarons est choisi par 50 % des clients ;
- la part de tarte tatin, est choisie par 30 % des clients ;
- 20 % des clients ne prennent pas de dessert ;
- aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.

On note les événements suivants :

- M : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- S : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C : « Le client prend un café ».

- 1) En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ probabilité de T et celle de $p_T(C)$ probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
- 2) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.
- 3) a) Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$.
Calculer alors $p(M \cap C)$.
b) Montrer que $p(C) = 0,76$.
- 4) Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (On donnera le résultat arrondi au centième).