Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 8 octobre 2020

EXERCICE 1

Résoudre les équations suivantes : **(4 points)**

1) $7x + 3 - 5(x + 6) + 3(2x - 6) = 4x - 1$, on a alors :

$$7x + 3 - 5x - 30 + 6x - 18 = 4x - 1$$
$$7x - 5x + 6x - 4x = -3 + 30 + 18 - 1$$
$$4x = 44 \Leftrightarrow x = 11 \Leftrightarrow S = \{11\}$$

2) $(2x - 1)(3x + 5) = 3(2x + 1)(x + 2)$, 1^{er} degré, on développe

$$\cancel{6x^2} + 10x - 3x - 5 = \cancel{6x^2} + 12x + 3x + 6$$
$$10x - 3x - 12x - 3x = 11$$
$$-8x = 11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{8} \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{11}{8}\right\}$$

3) $\dfrac{2(x + 2)}{5} - \dfrac{x - 1}{2} = 1$, on a alors :

$$(\times 10) \quad 4(x + 2) - 5(x - 1) = 10$$
$$4x + 8 - 5x + 5 = 10$$
$$-x = -3 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow S = \{3\}$$

4) $\dfrac{7x - 3}{3} + \dfrac{10 + 4x}{7} = 3x + \dfrac{9 - 2x}{21}$, on a alors :

$$(\times 21) \quad 7(7x - 3) + 3(10 + 4x) = 63x + 9 - 2x$$
$$49x - 21 + 30 + 12x = 63x + 9 - 2x$$
$$49x + 12x - 63x + 2x = 21 - 30 + 9$$
$$0x = 0 \text{ toujours vrai} \Leftrightarrow S = \mathbb{R}$$

EXERCICE 2

Résoudre les équations suivantes : **(5 points)**

1) $(3x + 2)^2 = (5 - 2x)(3x + 2)$

$$(3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2) \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} (3x + 2)(3x + 2 - 5 + 2x) = 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(5x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow S = \left\{-\frac{2}{3} ; \frac{3}{5}\right\}$$

2) $4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2) = 0$, différence de deux carrés

$$(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)(x - 2) = 0 \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} (2x + 3)(2x - 3 + x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x + 3)(3x - 5) \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{5}{3}\right\}$$

3) $(3x+4)^2-(4x-2)^2=0$, différence de deux carrés

$$(3x+4-4x+2)(3x+4+4x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (-x+6)(7x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad S=\left\{-\frac{2}{7}\,;\,6\right\}$$

4) $4(x-5)^2=9$, égalité de deux carrés

$$2(x-5)=3 \text{ ou } 2(x-5)=-3 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=13 \text{ ou } 2x=7 \quad\Leftrightarrow\quad S=\left\{\frac{7}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right\}$$

5) $4x^2-12x=-9 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2-12x+9=0 \quad\overset{\text{carré parfait}}{\Leftrightarrow}\quad (2x-3)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Exercice 3

Résoudre les équations rationnelles suivantes : (3 points)

1) $\dfrac{3x+1}{1-2x}=-\dfrac{3}{2} \qquad D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$x\in D_f$, produit en croix

$$6x+2=-3+6x \quad\Leftrightarrow\quad 0x=-5 \quad\overset{\text{impossible}}{\Leftrightarrow}\quad S=\varnothing$$

2) $\dfrac{2x^2-5x}{x+4}=x \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-4\}$

$x\in D_f$, produit en croix

$$2x^2-5x=x^2+4x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-9x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-9)=0$$

$$x=0\in D_f \text{ ou } x=9\in D_f \quad\Leftrightarrow\quad S=\{0\,;\,9\}$$

3) $\dfrac{3x-4}{x-1}-\dfrac{4-3x}{(x-1)(x-2)}=0 \qquad D_f=\mathbb{R}-\{1\,;\,2\}$

$x\in D_f$, on multiplie par $(x-1)(x-2)$

$$(3x-4)(x-2)+(3x-4)=0 \quad\overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow}\quad (3x-4)(x-2+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (3x-4)(x-1)=0$$

$$x=\frac{4}{3}\in D_f \text{ ou } x=1\notin D_f \quad\Leftrightarrow\quad S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes : (4 points)

1) $\dfrac{2x-5}{3}<\dfrac{3x+1}{5}+x \quad\overset{\times 15}{\Leftrightarrow}\quad 10x-25<9x+3+15x \quad\Leftrightarrow\quad 10x-9x-15x<25+3$

$\Leftrightarrow\quad -14x<28 \quad\Leftrightarrow\quad x>-2 \quad\Leftrightarrow\quad S=]-2\,;+\infty[$

2) $\dfrac{3-x}{x+2}\geqslant 4 \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$x\in D_f$, $\quad \dfrac{3-x}{x+2}-4\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{3-x-4x-8}{x+2}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{-5x-5}{x+2}\geqslant 0$

Valeurs frontières : $x=-1$ et $x=-2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-5x-5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-5x-5}{x+2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$S =]-2\,;-1]$

3) $(4x-5)^2 \leqslant (6x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (4x-5)^2 - (6x+1)^2 \leqslant 0$ on factorise

$\Leftrightarrow \quad (4x-5-6x-1)(4x-5+6x+1) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2x-6)(10x-4) \leqslant 0$

Valeurs frontières : $x = -3$ et $x = \dfrac{2}{5}$

x	$-\infty$		-3		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$-2x-6$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$10x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(-2x-6)(10x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\,;-3] \cup \left[\dfrac{2}{5}\,;+\infty\right[$

4) $\dfrac{3-x}{(x+1)(x-4)} \geqslant 0 \qquad D_f = \mathbb{R} - \{-1\,;\ 4\}$

Valeurs frontières : $x = 3, \quad x = -1$ et $x = 4$

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{3-x}{(x+1)(x-4)}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

$S =]-\infty\,;-1[\cup [3\,;\ 4[$

EXERCICE 5

Histoire d'œufs **(2 points)**

1) Soit x le nombre d'œufs du fermier. On a alors :

$$1,4(x-5) = 0,9x+10 \quad \Leftrightarrow \quad 1,4x - 7 = 0,9x + 10 \quad \Leftrightarrow \quad 0,5x = 17 \quad \Leftrightarrow x = 34$$

Le fermier avait 34 œufs.

2) Soit x le nombre total d'appartements. On a alors :

$$\frac{2}{5}x + (\frac{1}{5}x + 8) + 16 = x \overset{\times 5}{\Leftrightarrow} 2x + x + 40 + 80 = 5x \quad \Leftrightarrow \quad -2x = -120 \quad \Leftrightarrow \quad x = 60$$

Il y a 60 appartements. Les électriciens ont travaillé respectivement sur $\dfrac{120}{5} = 24$, $\dfrac{60}{5} + 8 = 20$ et 16 appartements.

EXERCICE 6

Vrai-Faux **(2 points)**

1) **Vrai**, on divise l'inéquation par (-3) en inverant l'inégalité :

$$(3-6x)(x+2)>0 \iff -3(2x-1)(x+2)>0 \overset{\div(-3)}{\iff} (x+2)(2x-1)<0$$

2) **Vrai**, $\dfrac{2x-1}{2-x} \geqslant 1 \qquad D_f = \mathbb{R}-\{2\}$

$$x \in D_f, \quad \frac{2x-1}{2-x}-1 \geqslant 0 \iff \frac{2x-1-2+x}{2-x} \geqslant 0 \iff \frac{3x-3}{2-x} \geqslant 0$$

Valeurs frontières : $x=1$ et $x=2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$3x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x-3}{2-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$S=[1\,;\,2[$

Si $x \in [1\,;\,2[$ alors on a : $x \geqslant 1$ et t $x \neq 2$. La proposition est vérifiée.

Remarque : S'il y avait eu une équivalence la proposition aurait alors été fausse.

Contre-exemple : $\begin{cases} 3 \geqslant 1 \\ 3 \neq 2 \end{cases}$ mais 3 ne vérifie pas $\dfrac{2x-1}{2-x} \geqslant 1$ car $\dfrac{6-1}{2-3} = -5 \ngeqslant 1$.