Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 19 novembre 2020

EXERCICE 1

Fonction trinôme **(5 points)**

1) a) $f(x) = 2x^2+14x+\dfrac{39}{2} = 2\left(x^2+7x+\dfrac{39}{4}\right) = 2\left[\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{4}+\dfrac{39}{4}\right] = 2\left[\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{2}\right]$

$= 2\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2 - 5.$

b) On obtient le tableau de variation suivant avec : $a = 2 > 0$, $\alpha = -\dfrac{7}{2}$ et $\beta = -5$.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-5	↗ $+\infty$

c) Au vu de ce tableau, la fonction f change de signe deux fois sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{7}{2}\right]$ et sur $\left[-\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$ donc la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses deux fois.

2) a) $\Delta = 9+160 = 169 = 13^2$. $\Delta > 0$, la fonction g admet deux racines.

$$x_1 = \frac{3+13}{-4} = -4 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{3-13}{-4} = \frac{5}{2}$$

.

b) $g(x) = -2(x+4)\left(x-\dfrac{5}{2}\right) = (x+4)(-2x+5).$

c) $g(x) = x+4 \Leftrightarrow (x+4)(-2x+5)-(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(-2x+5-1) = 0 \Leftrightarrow$ $(x+4)(-2x+4) = 0 \Leftrightarrow 2(x+4)(-x+2) \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 2$.

L'équation $g(x) = x+4$ admet deux solutions -4 et 2.

d) $g(x) = 15 \Leftrightarrow -2x^2-3x+5 = 0$. $x_1 = 1$ racine évidente,

$P = -\dfrac{5}{2}$ donc $x_2 = -\dfrac{5}{2}$.

L'équation $g(x) = 15$ admet deux solutions 1 et $-\dfrac{5}{2}$.

EXERCICE 2

Équations **(4 points)**

1) $3x^2+7x+4 = 0$. $x_1 = -1$ racine évidente $P = \dfrac{4}{3}$ donc $x_2 = -\dfrac{4}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{4}{3}\,;-1\right\}$.

2) $4x^2 + x + 1 = 0$. $\Delta = 1 - 16 = -15$ comme $\Delta < 0$ pas de solution donc $S = \emptyset$.

3) $3x^2 + 4x - 3 = 0$. On a $\Delta = 16 + 36 = 52 = (2\sqrt{13})^2$ deux solutions

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{13}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{13}}{6} = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}$$

4) $\dfrac{4}{3}x^2 + 12x + 25 = -2 \overset{\times 3}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 36x + 75 = -6 \Leftrightarrow 4x^2 + 36x + 81 = 0 \overset{\text{carré parfait}}{\Leftrightarrow}$

$(2x + 9)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow S = \left\{-\dfrac{9}{2}\right\}$.

Remarque : Si on de voit pas le carré parfait, on calcule $\Delta = 0$ d'où une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{\frac{8}{3}} = -\dfrac{9}{2}$

Exercice 3

Changement de variable **(3 points)**

1) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$. On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$. L'équation (E) devient :

$X^2 - 5X - 6 = 0$. $X_1 = -1$ (non retenue) racine évidente, or $P = -6$ donc $x_2 = 6$.

On revient à x : $x^2 = 6 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{6}$ ou $x_2 = -\sqrt{6} \Leftrightarrow S = \left\{-\sqrt{6}\,;\ \sqrt{6}\right\}$.

2) $2x - 5\sqrt{x} - 7 = 0$. On pose $X = \sqrt{x}$ avec $X \geqslant 0$. L'équation (F) devient :

$2X^2 - 5X - 7 = 0$. $X_1 = -1$ (non retenue) racine évidente, or $P = -\dfrac{7}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{7}{2}$.

On revient à x : $\sqrt{x} = \dfrac{7}{2} \overset{\uparrow 2}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{49}{4} \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{49}{4}\right\}$.

Exercice 4

Inéquation **(4 points)**

1) $(x - 3)^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 > -2$ toujours vrai $\Leftrightarrow S = \mathbb{R}$.

2) $2x^2 - 8x + 2 < 0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 1 < 0$. On a $\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ ou $x_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]2 - \sqrt{3}\,;\ 2 + \sqrt{3}\right[$

3) $\dfrac{2x - 5}{2x - 1} \leqslant \dfrac{x + 1}{x + 3} \Leftrightarrow \dfrac{2x - 5}{2x - 1} - \dfrac{x + 1}{x + 3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x - 5)(x + 3) - (x + 1)(2x - 1)}{(2x - 1)(x + 3)} \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 6x - 5x - 15 - 2x^2 + x - 2x + 1}{(2x - 1)(x + 3)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-14}{(2x - 1)(x + 3)} \leqslant 0 \quad \text{avec } D_f = \mathbb{R} - \left\{-3\,;-\frac{1}{2}\right\}$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-14}{(2x-1)(x+3)}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

$$S =]-\infty\,;-3[\cup\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$$

Exercice 5

Équation paramétrique **(2 points)**

1) Si $m=0$ l'équation est du premier degré. (E_0) : $-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

2) (E_m) admet une solution double si et seulement si $m\neq 0$ et $\Delta=0 \overset{m\neq0}{\Leftrightarrow}$
$4(m-2)^2-4m(m+1)=0 \overset{m\neq0}{\Leftrightarrow} 4[(m-2)^2-m(m+1)]=0 \overset{m\neq0}{\Leftrightarrow} 4(m^2-4m+4-m^2-m)=0$
$\overset{m\neq0}{\Leftrightarrow} 4(-5m+4)=0 \overset{m\neq0}{\Leftrightarrow} m=\dfrac{4}{5}$

3) (E_m) admet deux solutions de signes contraires ssi $m\neq0$, $\Delta>0$ et $P<0$
$\overset{m\neq0}{\Leftrightarrow} -5m+4>0$ et $\dfrac{m+1}{m}<0 \Leftrightarrow m<\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{m+1}{m}<0$

m	$-\infty$		-1		0		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
Δ		$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
P		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	

$m\in]-1\,;\,0[$

Exercice 6

Problème d'aire **(2 points)**

Soit x le réel positif cherché, on a alors :

$$\mathscr{A}(\text{MBN})=\frac{1}{6}\mathscr{A}(\text{ABCD}) \Leftrightarrow \frac{\text{BN}\times\text{BM}}{2}=\frac{\text{AB}\times\text{AD}}{6} \Leftrightarrow \frac{x(6-x)}{2}=\frac{6\times4}{6} \overset{\times2}{\Leftrightarrow}$$
$$x(6-x)=8 \Leftrightarrow 6x-x^2-8=0 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} x^2-6x+8=0$$

$\Delta=36-32=4$ deux solutions $x_1=\dfrac{6+2}{2}=4$ ou $x_2=\dfrac{6-2}{4}=2.$

Les valeurs possibles de x pour que l'aire du triangle MBN soit égale à un sixième de l'aire du rectangle ABCD sont 2 et 4.