Devoir de mathématiques

A rendre pour le lundi 4 janvier 2021

EXERCICE 1

Monotonie **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

1) Déterminer u_0, u_4 et u_{99} sous forme décimale.
Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de u_n si n devient très grand ?
2) Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
3) Soit $a \in]2\ ;\ 3]$. Recopier et compléter sur la copie le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$.

```
def seuil(a):
    n=0
    while (2*n+3)/(n+1) ... a:
        n= ...
    return ...
```

EXERCICE 2

Divers **(6 points)**

1) Calculer la somme : $S = 220 + 224 + 228 + \cdots + 1\,000$.
On justifiera clairement la démarche et l'on donnera la formule utilisée.
2) Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_1 = 5\,150$ et $u_2 = 5304,5$.
   a) Déterminer la raison q de la suite ainsi que le premier terme u_0.
   b) Soit $S_{18} = u_0 + u_1 + \dots u_{18}$.
   Donner la valeur exacte de S_{18} puis sa valeur approchée au centième.
3) Soit $u_0 = 300$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 15$.
   a) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   b) On pose $v_n = u_n + 300$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   c) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 3

Plaques de verre teintées **(6 points)**

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 20 % de son intensité lumineuse. L'intensité lumineuse est exprimée en candela (cd).
On utilise une lampe torche qui émet un rayon d'intensité lumineuse réglée à 400 cd.
On superpose n plaques de verres identiques (n étant un entier naturel) et on désire mesurer l'intensité lumineuse I_n du rayon à la sortie de la n-ième plaque.
On note $I_0 = 400$ l'intensité lumineuse du rayon émis par la lampe torche avant de traverser les plaques (intensité lumineuse initiale). Ainsi, cette situation est modélisée par la suite (I_n).

1) Montrer par un calcul que $I_1 = 320$.
2) a) Pour tout entier naturel n , exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b) En déduire la nature de la suite (I_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   c) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n.
3) On souhaite déterminer le nombre minimal n de plaques à superposer afin que le rayon initial ait perdu au moins 70 % de son intensité lumineuse initiale après sa traversée des plaques.
   a) Afin de déterminer le nombre de plaques à superposer, on considère la fonction Python suivante :

```python
def nombrePlaques(J):
    I=400
    n=0
    while I>J:
        I=0.8*I
        n=n+1
    return n
```

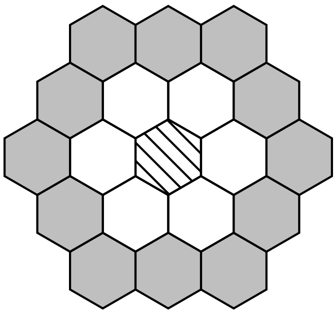
   Préciser, en justifiant, le nombre J de sorte que l'appel nombrePlaques(j) renvoie le nombre de plaques à superposer.
   b) Rentrer le programme dans la calculatrice puis donne le nombre de plaques nécessaires.

Exercice 4

Carrelage **(5 points)**

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 1$). Ainsi $u_1 = 6$.

1) Quelles sont les valeurs de u_2 et u_3 ?
2) a) On admet que la suite (u_n) est une suite arithmétique, déterminer sa raison.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
3) Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ? Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4) On pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Montrer que $S_n = 3n^2 + 3n$.
5) Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n-ième étape, est donc $C_n = S_n + 1$.
   À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2 977$^{\text{e}}$ carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?