# Correction contrôle de mathématiques

## Du jeudi 7 octobre 2021

## EXERCICE 1

**Résoudre les équations suivantes :** **(4 points)**

1) $2x - 3(x+1) = \dfrac{1-3x}{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} (\times 2) \quad & 4x - 6x - 6 = 1 - 3x \\ & 4x - 6x + 3x = 6 + 1 \\ & x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad S = \{7\} \end{aligned}$$

2) $2(x+8) - 3x + 5 = 21 - x$, on a alors :

$$\begin{aligned} & 2x + 16 - 3x + 5 = 21 - x \\ & 2x - 3x + x = -16 - 5 + 21 \\ & 0x = 0 \text{ toujours vrai} \quad \Leftrightarrow \quad S = \mathbb{R} \end{aligned}$$

3) $\dfrac{x+7}{4} - \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{x+2}{3}$, on a alors :

$$\begin{aligned} (\times 12) \quad & 3(x+7) - 2(x-1) = 4(x+2) \\ & 3x + 21 - 2x + 2 = 4x + 8 \\ & 3x - 2x - 4x = -21 - 2 + 8 \\ & -3x = -15 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad S = \{5\} \end{aligned}$$

4) $\sqrt{2}\,(x + \sqrt{3}) + 1 = \sqrt{2}\,(2x+7) + \sqrt{6} - 6\sqrt{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} & x\sqrt{2} + \cancel{\sqrt{6}} + 1 = 2x\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + \cancel{\sqrt{6}} - 6\sqrt{2} \\ & x\sqrt{2} - 2x\sqrt{2} = -1 + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ & -x\sqrt{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \overset{\times\sqrt{2}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right\} \end{aligned}$$

## EXERCICE 2

**Résoudre les équations suivantes :** **(5 points)**

*On factorisera si nécessaire.*

1) $(2x+1)(3x+1) = (4x-5)(2x+1)$

$$(2x+1)(3x+1) - (4x-5)(2x+1) = 0 \quad \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} \quad (2x+1)(3x+1-4x+5) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2x+1)(-x+6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 6\right\}$$

2) $x^2 - 25 - (5-x)(3x-4) = 0$

$$(x-5)(x+5) + (x-5)(3x-4) = 0 \quad \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} \quad (x-5)(x+5+3x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-5)(4x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{-\frac{1}{4}\ ;\ 5\right\}$$

3) $(3-2x)^2 = (5x+3)^2$, égalité de deux carrés

$3-2x = 5x+3$ ou $3-2x = -5x-3 \Leftrightarrow -7x = 0$ ou $3x = -6 \Leftrightarrow S = \{-2\,;\,0\}$

4) $x^2 - (4-x)^2 = 0$, différence de deux carrés

$$(x-4+x)(x+4-x) = 0 \Leftrightarrow 4(2x-4) = 0 \overset{\div 8}{\Leftrightarrow} x-2 = 0 \Leftrightarrow S = \{2\}$$

5) a) On développe la quantité de droite :

$$(x-1)(x-5)(x+3) = (x^2-5x-x+5)(x+3) = (x^2-6x+5)(x+3)$$
$$= x^3+3x^2-6x^2-18x+5x+15 = x^3-3x^2-13x+15 = P(x)$$

b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $x-5 = 0$ ou $x+3 = 0 \Leftrightarrow$
$S = \{-3\,;\,1\,;\,5\}$

## Exercice 3

**Résoudre les équations rationnelles suivantes : (3 points)**

1) $\dfrac{1-2x}{3x+1} = -\dfrac{4}{3}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

$x \in D_f$, produit en croix

$$3-6x = -12x-4 \Leftrightarrow 6x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6} \in D_f \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{7}{6}\right\}$$

2) $\dfrac{(x-5)(x+7)}{(x-1)(5-x)} = 2$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{1\,;\,5\}$

$x \in D_f$, produit en croix

$$(x-5)(x+7) = 2(x-1)(5-x) \Leftrightarrow (x-5)(x+7) - 2(x-1)(5-x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-5)(x+7) + 2(x-1)(x-5) = 0 \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} (x-5)(x+7+2x-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-5)(3x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \notin D_f \text{ ou } x = -\frac{5}{3} \in D_f \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

3) $\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{x}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x-2} = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$

$x \in D_f$, produit en croix

$$-(x-2)(x+2) = x(x-2) \Leftrightarrow x(x-2) + (x-2)(x+2) = 0 \overset{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-2)(x+x+2) \Leftrightarrow (x-2)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \notin D_f \text{ ou } x = -1 \in D_f$$
$$\Leftrightarrow S = \{-1\}$$

## Exercice 4

**Résoudre les inéquations suivantes : (4 points)**

1) $2(x-4)+1-5x \leqslant 3(1-x)-7 \Leftrightarrow 2x-8+1-5x \leqslant 3-3x-7 \Leftrightarrow$

$2x-5x+3x \leqslant 8-1+3-7 \Leftrightarrow 0x \leqslant 3 \overset{\text{tjours vrai}}{\Leftrightarrow} S = \mathbb{R}$

2) $\dfrac{2x+4}{x-5} \leqslant 0 \qquad D_f = \mathbb{R} - \{5\}$

Valeurs frontières : $2x+4=0 \iff x=-2$ et $x=5$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+4$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x-5$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |
| $\dfrac{2x+4}{x-5}$ | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ |

$S = [-2\,;\,5[$

3) $(x-2)(2x+8)-(5x-7)(x-2) < 0$ on factorise

$(x-2)(2x+8-5x+7) < 0 \iff (x-2)(-3x+15) < 0 \iff 3(x-2)(5-x) < 0$

Valeurs frontières : $x=2$ et $x=5$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |
| $5-x$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ |
| $(x-2)(5-x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$S = ]-\infty\,;\,2[\,\cup\,]5\,;+\infty[$

4) $\dfrac{x-1}{x-3} \geqslant \dfrac{x-2}{x-4} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{3\,;\,4\}$

$x \in D_f,\quad \dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x-2}{x-4} \geqslant 0 \iff \dfrac{(x-1)(x-4)-(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} \geqslant 0$

$\dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{4x}-\cancel{x}+4-\cancel{x^2}+\cancel{3x}+\cancel{2x}-6}{(x-3)(x-4)} \geqslant 0 \iff \dfrac{-2}{(x-3)(x-4)} \geqslant 0 \overset{\div(-2)}{\iff}$

$\dfrac{1}{(x-3)(x-4)} \leqslant 0$

Valeurs frontières : $x=3$ et $x=4$

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$ | $+$ | \|\| | $-$ | \|\| | $+$ |

$S = ]3\,;\,4[$

## Exercice 5

**Histoire d'âges et de terrain** **(2 points)**

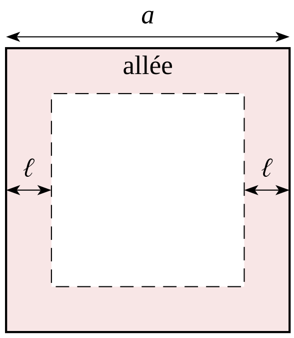
*On précisera clairement l'inconnue que l'on choisira par résoudre les problèmes.*

1) Soit $x$ : l'âge du père à l'instant présent.

$x+6 = 2[(x-27)+6] \iff x+6 = 2x-54+12 \iff x-2x = -6-54+12 \iff$
$-x = -48 \iff x = 48 \iff x-27 = 21$

À l'instant présent, le père a 48 ans et son fils 21 ans.

2) Soit $a$ : la longueur du côté du terrain en m
et $\ell$ : la largeur de l'allée en m.




Différence de longueur de parcours de l'allée

$4a - 4(a - 2\ell) = 32 \iff \cancel{4a} - \cancel{4a} + 8\ell = 32$

$8\ell = 32 \iff \ell = 8$

Superficie de l'allée

$a^2 - (a - 2\ell)^2 = 464 \iff a^2 - (a-8)^2 = 464$

$\cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 16a - 64 = 464 \iff 16a = 464 + 64 \iff a = \dfrac{528}{16} = 33 \iff a^2 = 33^2 = 1\,089$

La superficie du terrain est de 1 089 m$^2$.

## Exercice 6

**Vrai-Faux** **(2 points)**

1) **Vrai**, en effet, on a les équivalences suivantes :

$$(4-2x)(9-3x) > 0 \iff (-2)(-2+x)(-3)(-3+x) > 0 \iff 6(x-2)(x-3) > 0$$

$$\overset{\div 6}{\iff} (x-2)(x-3) > 0$$

2) **Faux**, il faut trouver un contre-exemple. On modifie alors l'expression :

$$\frac{2x+1}{x-1} \geqslant 1 \qquad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \in D_f, \quad \frac{2x+1}{x-1} - 1 \geqslant 0 \iff \frac{2x+1-x+1}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{x+2}{x-1} \geqslant 0 \Rightarrow -1 \text{ n'est pas solution}$$

$$\text{or} \quad -1 \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$$