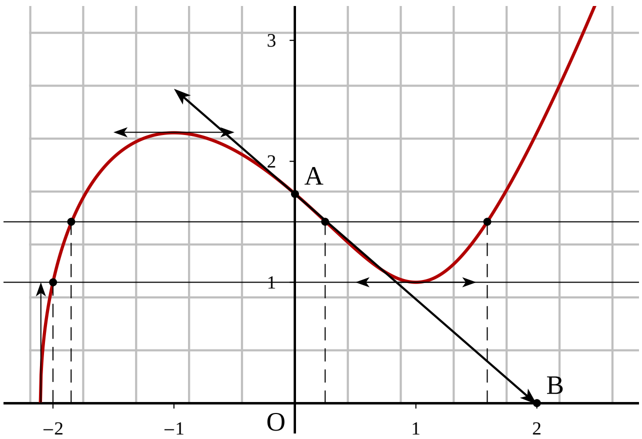
Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 27 janvier 2022

EXERCICE 1

Représentation graphique **(5 points)**



1) a) $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales en 1 et (-1) donc : $f'(-1) = f'(1) = 0$.

   b) $f'(0) = \dfrac{-\text{OA}}{\text{OB}} = \dfrac{-1,73}{2} = -0,865$.

2) a) Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1.5$, on trace la droite $y = 1,5$, puis on cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = 1,5$.

   b) On trouve trois solutions : $x_1 = -1.8$, $x_2 = 0.25$ et $x_3 = 1.6$

   c) Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$, on trace droite $y = 1$, puis l'on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au-dessus de la droite $y = 1$.

   On trouve alors : $S = [-2\,;+\infty[$

3) On a le tableau de variations suivant :

x	$-2,1$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$2,25$	↘	1	↗	$+\infty$

4) f n'admet pas de nombre dérivée en $-2,1$ car la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $-2,1$ est verticale.

EXERCICE 2

Calcul de dérivées **(8 points)**

1) $f(x) = 3x^4 - 18x^2 + 21$ dérivable sur $\mathbb{R}$

   $f'(x) = 12x^3 - 36x = 12x(x^2 - 3) = 12(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

2) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ dérivable sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$

   $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{5-2x}$ dérivable sur $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{5-2x}}$$

4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$ dérivable sur les intervalles de $\mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$

$$f'(x) = \frac{-3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$$

5) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-3x}$ dérivable sur les intervalles de $\mathbb{R} - \{0,;\,3\}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-3x)-(2x-3)(2x+1)}{(x^2-3x)^2} = \frac{2x^2-6x-4x^2-2x+6x+3}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x^2-2x+3}{(x^2-3x)^2}$$

6) $f(x) = (2x-5)\sqrt{2x+1}$ dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

$$f'(x) = 2\sqrt{2x+1} + \frac{2(2x-5)}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{4x+2+2x-5}{\sqrt{2x+1}} = \frac{6x-3}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3(2x-1)}{\sqrt{2x+1}}$$

7) $f(x) = (3x^2-5x+1)^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3(6x-5)(3x^2-5x+1)^2$

EXERCICE 3

Équation de la tangente **(2 points)**

1) $f'(x) = \dfrac{2(x-3)-1(2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$

2) $T_2 : y = f'(2)(x-2)+f(2)$ or $f'(2) = -7$ et $f(2) = -5$ donc

$T_2 : y = -7(x-2)-5 \Leftrightarrow y = -7x+9$

EXERCICE 4

Boîte en carton **(5 points)**

1) a) $f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2-8x+12)$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-8x+12 = 0 \overset{\Delta=4^2}{\Leftrightarrow} x_1 = \dfrac{8+4}{2} = 6$ ou $x_2 = \dfrac{8-4}{2} = 2$

$f(2) = 32 - 192 + 288 = 128$

$f(6) = 4\times 216 - 48\times 36 + 144\times 6 = 0$

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	128	↘	0	↗	$+\infty$

2) a) Le fond de la boîte est un carré de côté $a = 12 - 2\times 1 = 10$ et de hauteur $h = 1$,

donc $V = a^2h = 10^2\times 1 = 100$ cm^3.

b) On a $a = 12-2x$ et $h = x$, on obtient alors :
$V = a^2h = x(12-2x)^2 = x(144-48x+4x^2) = 4x^3-48x^2+144x = f(x)$.

c) D'après le tableau de variations f admet un maximum en $x = 2$.
Le volume maximal 128 cm^3 de la boîte est obtenu pour $x = 2$ cm.