Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 17 février 2022

EXERCICE 1

Propriétés algébriques **(5 points)**

1) a) $A = \dfrac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} = e^{6-4+3} = e^5$ b) $B = \dfrac{e^{1+x}}{e^{x+2}} = e^{1+x-x-2} = e^{-1}$

c) $C = \dfrac{(e^{-2x})^3 e^{4x}}{e^{-2x}} = e^{-6x+4x+2x} = e^0 = 1$

2) a) $2(e^x - 1)(e^x + 4) = (2e^x - 2)(e^x + 4) = 2e^{2x} + 8e^x - 2e^x - 8 = 2e^{2x} + 6e^x - 8$

b) $\dfrac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

EXERCICE 2

Résolution d'équations et d'inéquations **(4 points)**

1) a) $(7x - 23)e^x = 0 \Leftrightarrow 7x - 23 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{23}{7}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0$.

b) $e^{2x+3} = e^1 \Leftrightarrow 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ car la fonction exp est monotone sur $\mathbb{R}$.

2) a) $e^{-x} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant e^0 \Leftrightarrow -x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0 \Leftrightarrow S = [0\,;+\infty[$,
car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $(6 - 3x)e^x > 0 \Leftrightarrow 6 - 3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow S =]-\infty\,;\ 2[$
car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$

EXERCICE 3

Variations de fonctions **(5 points)**

1) a) $f'(x) = 4e^{-x} + (4x - 1)(-1)\,e^{-x} = e^{-x}\,(4 - 4x + 1) = e^{-x}\,(-4x + 5)$

b) • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \neq 0$.

• Signe $f'(x)$ = signe de $(-4x + 5)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$.

x	0		$\frac{5}{4}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$4e^{-\frac{5}{4}}$	$\searrow$	$19e^{-5}$

2) a) $g'(x) = (2x - 5)\,e^x + (x^2 - 5x + 7)\,e^x = e^x\,(2x - 5 + x^2 - 5x + 7) = e^x(x^2 - 3x + 2)$.

b) • $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ racine évidente ou $x_2 = 2$.
car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0$.

- Signe de $g'(x)$ = signe de $(x^2 - 3x + 2)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$.

x	-5		1		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$57e^{-5}$	$\nearrow$	$3e$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	e^3

Exercice 4

Smartphone **(6 points)**

1) $N(1) = 100\,e^{-1} \approx 13,534$ au milliers d'unités près.
   Le nombre de smartphones vendus à 1 000 € sera 13,534 millions d'unités.

2) $B(1) = N(1) - 0,4N(1) = 0,6N(1) \approx 0.6 \times 13.534 \approx 8,120$.
   Le bénéfice trimestriel peut être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente 1000 €.

3) $B(x) = R(x) - C(x) = xN(x) - 0,4N(x) = N(x)(x - 0,4) = 100\,e^{-2x}(x - 0,4)$
   $= (100x - 40)\,e^{-2x}$.

4) $B'(x) = 100\,e^{-2x} + (100x - 40)(-2)\,e^{-2x} = e^{-2x}\,(100 - 200x + 80) = e^{-2x}\,(-200x + 180)$.

5)
   - $B'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -200x + 180 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{180}{200} = 0,9$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \neq 0$.
   - Signe de $B'(x)$ = signe de $(-200x + 180)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$.

x	$0,4$		$0,9$		2
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$50e^{-1,8}$	$\searrow$	$160e^{-4}$

6) Pour assurer un bénéfice maximal, il faut vendre les smartphone à 900 €, ce qui donnera un bénéfice de $50e^{1,8} \approx 8,265$ milliards d'euros.