Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 7 décembre 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse b)** : $r = \dfrac{u_7 - u_3}{4} = 7$ et $u_0 = u_3 - 3r = 6$, d'où $u_{52} = 6 + 7 \times 52 = 370$.
2) **Réponse a)** : Somme des termes d'une suite arithmétique de raison 6
$$S = \left(\frac{622-4}{6} + 1\right)\left(\frac{4+622}{2}\right) = 32\,552$$
3) **Réponse d)** : $v_n = \dfrac{v_{n+1} + 5}{2}$, on trouve successivement $v_2 = -23$, $v_1 = -9$ et $v_0 = -2$.
4) **Réponse d)** : $S = \underbrace{1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{30}}_{31 \text{ termes}} = \dfrac{1 - 5^{31}}{1 - 5} = \dfrac{5^{31} - 1}{4}$
5) **Réponse a)** : L'algorithme calcule les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 200$. $u_3 = 200 \times 0,9^3 = 145,80$

EXERCICE 2

Prix d'un appartement **(5 points)**

1) Une augmentation de 3 % revient à multiplier par 1,03.
   - Le prix du m² en 2020 : $4\,200 \times 1,03 = 4\,326$ €
   - Le prix du m² en 2021 : $4\,326 \times 1,03 = 4\,455,78$ €
2) a) D'une année à l'autre le prix du m² est multiplié par 1,03 donc $u_{n+1} = 1,03u_n$
   La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = 4\,200$.

   b) $u_n = u_0 q^n = 4\,200 \times 1,03^n$.

   c) Si on dispose de 200 000 € en 2024, on pourra acheter un appartement de 40 m² :
   2024 correspond à $n = 5$, un appartement de 40 m² coûtera alors :
$$40 \times 4\,200 \times 1,03^5 = 194\,758,04 \text{ €}.$$
3) On trouve alors $n = 22$ (non demandé)

```python
def seuil():
    u=4200
    n=0
    while u<=8000 :
        u=1.03*u
        n=n+1
    return n
```

EXERCICE 3

Château de cartes **(5 points)**

1) On passe d'un étage à un autre en rajoutant 3 cartes au nombre de l'étage inférieur : $r = 3$ et le premier terme est $u_1 = 2$.

2) On a $u_n = u_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

$$\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n}_{n \text{ termes}} = 1\,962 \;\Leftrightarrow\; n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) = 1\,962 \;\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}\; n(2 + 3n - 1) = 3\,924 \;\Leftrightarrow$$

$$3n^2 + n - 3\,924 = 0$$

3) On résout l'équation : $\Delta = 1 + 12 \times 3\,924 = 47\,089 = 217^2$

La solution positive est $n = \dfrac{-1 + 217}{6} = 36$. On peut construire 36 étages.

4) On peut proposer cet algorithme qui renvoie 36

```
n=1
u=2
s=2
while s<1962:
    n=n+1
    u=u+3
    s=s+u
print(n)
```

Exercice 4

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

1) a) $u_1 = 1\,400$, $u_2 = 1\,240$ et $u_3 = 1\,112$.

b) La suite (u_n) est ni arithmétique ni géométrique car :

$u_1 - u_0 = 200$ et $u_2 - u_1 = 160$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ non arithmétique.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1\,400}{1\,600} = \dfrac{7}{8}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1\,240}{1\,400} = \dfrac{31}{40}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ non géométrique.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 600 = 0,8u_n + 120 - 600 = 0,8u_n - 480 = 0,8(u_n - 600) = 0,8v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 600 = 1\,000$.

b) $v_n = v_0\, q^n = 1\,000 \times 0,8^n$ et $u_n = 1\,000 \times 0,8^n + 600$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$, par produit et somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 600$.