Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 29 janvier 2024

Exercice 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c) :** $f'(-4) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{1} = 3$

2) **Réponse d) :** $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(1) = -1$ donc

   $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

3) **Réponse c) :** Pour que la fonction f soit définie, il faut que son dénominateur soit non nul et d'après la parabole $x \neq -1$ et $x \neq 7$.

4) **Réponse d) :** Pour résoudre $f(x) = 1 \Leftrightarrow mx + p = ax^2 + bx + c$, on cherche les abscisses des points d'intersection entre la parabole et la droite.

   Il y en a deux $x = 0$ et $x = 4$.

5) **Réponse a) :** On dérive comme un produit $(uv)'$ et la racine comme $(\sqrt{u})'$:

   $f'(x) = \sqrt{2x+3} + x \times \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+3}} = \dfrac{2x+3+x}{\sqrt{2x+3}} = \dfrac{3x+3}{\sqrt{2x+3}} = \dfrac{3(x+1)}{\sqrt{2x+3}}$

Exercice 2

Fonctions dérivées **(6 points)**

1) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - 6x^2 + 7$ dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme).

   $f'(x) = 3x^3 - 12x = 3x(x^2-4) = 3x(x-2)(x+2)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$ dérivable si $x^2 + 2x - 3 \neq 0 \overset{x=1 \text{ rac. évidente}}{\Leftrightarrow} x \neq 1$ et $x \neq -3$.

   On dérive comme $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{-(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}$.

3) $f(x) = \dfrac{5x-3}{2x-7}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{7}{2}\}$ On dérive comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

   $f'(x) = \dfrac{5(2x-7)-2(5x-3)}{(2x-7)^2} = \dfrac{10x-35-10x+6}{(2x-7)^2} = \dfrac{-29}{(2x-7)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$. On dérive comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

   $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)-1(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x+x-1-x^2-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.

5) $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive comme $(uv)' = u'v + uv'$.

   $f'(x) = 2x(x^3-2x) + (x^2+1)(3x^2-2) = 2x^4 - 4x^2 + 3x^4 - 2x^2 + 3x^2 - 2 = 5x^4 - 3x^2 - 2$.

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-2x+2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2 - 2x + 2 = 0 \overset{\Delta=-4<0}{\Leftrightarrow}$ pas de solution

   $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x+2) - x^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{2x(x^2-2x+2-x^2+x)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{2x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$

Exercice 3

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) La fonction f est paire car $[-3\,;\,3]$ est symétrique par rapport à 0 et :

$\forall x \in [-3\,;\,3],\quad f(-x) = -\dfrac{1}{4}(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 1 = f(x).$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) $f'(x) = -x^3 + 4x = x(4 - x^2) = x(2 - x)(2 + x).$

3) $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	-3		-2		0		2		3
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

4) On obtient le tableau de variation :

x	-3		-2		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\dfrac{5}{4}$

5) $\mathrm{T}_1 \;:\; y = f'(1)(x-1) + f(1) \;\Leftrightarrow\; y = 3(x-1) + \dfrac{11}{4} \;\Leftrightarrow\; y = 3x - \dfrac{1}{4}$

Exercice 4

Vase **(4 points)**

1) $C(40) = 40^2 - 400 + 500 = 1\,700$ et $R(40) = 50 \times 40 = 2\,000$.

La coût de production et la recette de 30 vases sont respectivement de 1 700 € et de 2 000 €. La bénéfice de l'artisan est alors de $2\,000 - 1\,700 = 300$ €.

2) a) $B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (x^2 - 10x + 500) = 50x - x^2 + 10x - 500 = -x^2 + 60x - 500$

or $(10 - x)(x - 50) = 10x - 500 - x^2 + 50 = -x^2 + 60x - 500 = B(x)$

b) $B(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 10$ ou $x = 50$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	0		10		50		60
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour que l'artisan réalise un bénéfice, il doit produire et vendre entre 10 et 50 vases.

c) $B'(x) = -2x + 60 = 2(-x + 30)$.

$B'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 30$ on obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		30		60
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-500	$\nearrow$	400	$\searrow$	-500

Le bénéfice maximal pour l'artisan est de 400 € obtenu pour la production et la vente de 30 vases.