Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 23 mai 2024

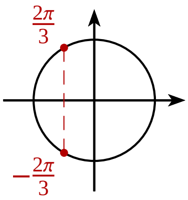
EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse b)** : car $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tandis que

$\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

2) **Réponse d)** : car



3) **Réponse d)** : car $\mathrm{BC}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \mathrm{AC}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mathrm{AB}^2$.

D'où $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2\right) = \dfrac{1}{2}(36 + 16 - 25) = \dfrac{27}{2}$

4) **Réponse c)** : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \cos 120° = 6 \times 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -12$

5) **Réponse b)** : Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) donc

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{CH}}{2} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \sin 60°}{2} = \frac{6 \times 4}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

EXERCICE 2

Alignement **(4 points)**

1) $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BJ}} \overset{\overrightarrow{\mathrm{BJ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{=} \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

2) a) $\mathrm{I}\left(0\,;\,\dfrac{3}{5}\right)$, $\mathrm{J}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$, $\mathrm{K}\,(k\,;\,0)$.

b) I, J et K sont alignés si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{\mathrm{IJ}}, \overrightarrow{\mathrm{IK}}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - 0 & k - 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{3}{5} & 0 - \frac{3}{5} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & k \\ -\frac{4}{15} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{15} + \frac{4}{15}k = 0 \overset{\times 15}{\Leftrightarrow} k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

EXERCICE 3

Angle dans un rectangle **(4 points)**

1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2,5 - 0 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = 12,5 - 9 = 3,5$.

2) Le repère étant orthonormé : $\mathrm{DE} = \sqrt{2,5^2 + 9} = \sqrt{15,25}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

3) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}}{DE\times AC} = \dfrac{3,5}{\sqrt{15,25}\times\sqrt{34}} = \dfrac{7}{\sqrt{61}\times\sqrt{34}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\dfrac{7}{\sqrt{61}\times\sqrt{34}}\right) \approx 81,2^\circ$

Exercice 4

Angle dans un triangle **(4 points)**

1) Comme $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{OC}$ on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right) = AO^2 + \underbrace{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}_{\text{col. même sens}}$$
$$= OA^2 + OB\times OC$$

2) D'après le théorème de Pythagore dans les triangles AOB et AOC rectangle en O :
$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow AB = 20$
$AC^2 = AO^2 + OC^2 = 16^2 + 18^2 = 256 + 324 = 580 \Rightarrow AB = \sqrt{580} = 2\sqrt{145}$

3) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{OA^2 + OB\times OC}{AB\times AC} = \dfrac{16^2 + 12\times 18}{20\times 2\sqrt{145}} = \dfrac{472}{40\sqrt{145}} = \dfrac{59}{5\sqrt{145}}$
$\theta = \arccos\left(\dfrac{59}{5\sqrt{145}}\right) \approx 11,5^\circ$.

Exercice 5

Triangle **(3 points)**

1) La relation qui permet de calculer l'angle $\widehat{BAC}$ en fonction des trois longueurs du triangle est la relation d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$$

2) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\times AC} = \dfrac{56^2+77^2-60^2}{2\times 56\times 77} = \dfrac{5\,465}{8\,624} \Rightarrow \theta = \arccos\dfrac{5\,465}{8\,624} \approx 51^\circ$.

3) Par une permutation circulaire, on obtient :
$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC\times AB} = \dfrac{60^2+56^2-77^2}{2\times 60\times 56} = \dfrac{807}{6\,720} = \dfrac{269}{2\,240} \Rightarrow$
$\theta = \arccos\dfrac{807}{2\,240} \approx 83^\circ$.