

Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 17 octobre 2024

EXERCICE 1

QCM

(5 points)

- 1) **d)** : $2x^2 - 4x - 6 = 0 \stackrel{\Delta=64}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{4+8}{4} = 3$ ou $x_2 = \frac{4-8}{4} = -1$.
La quantité se factorise en $2(x-3)(x+1)$ qui correspond à d).
- 2) **c)** : $S = 22$ et $P = 117$ l'équation est donc $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 22x + 117 = 0$.
- 3) **d)** : $-5x^2 + 2x + 7 > 0$ on prend à l'intérieur des racines -1 et $\frac{7}{5}$
- 4) **a)** : La parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) et coupe l'axe des ordonnées pour une ordonnée positive ($c > 0$). Par contre b et Δ sont négatifs.
- 5) **d)** : $\Delta = (2-m)^2 - 4(-m-3) = 4 - 4m + m^2 + 4m + 12 = m^2 + 16 > 0$ et $P = -m - 3$.
Si $m > -3$ alors $P < 0$, donc (E_m) admet deux racines de signes contraires.

EXERCICE 2

Équation du second degré

(5 points)

Résoudre les équations suivantes par la méthode de votre choix :

- 1) $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ racine évidente $P = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{3}{2}$.
- 2) $4x^2 - 10x - 6 = 0 \stackrel{\Delta=100+96=196=14^2}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{10+14}{8} = 3$ ou $x_2 = \frac{10-14}{8} = -\frac{1}{2}$
- 3) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0 \stackrel{\times 3}{\Leftrightarrow} x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$
- 4) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$
 $x \in D_f$, $(x-1)^2 = (x+1)(2x-5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 2x - 5 \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0$
 $\stackrel{\Delta=1+24=25=5^2}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{-1+5}{-2} = -2 \in D_f$ ou $x_2 = \frac{-1-5}{-2} = 3 \in D_f \Leftrightarrow S = \{-2; 3\}$.
- 5) $\frac{9}{(x-2)^2} + \frac{6}{x-2} = 3$, $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ on multiplie par $(x-2)^2$
 $x \in D_f$, $9+6(x-2) = 3(x-2)^2 \Leftrightarrow 9+6x-12 = 3x^2-12x+12 \Leftrightarrow 3x^2-18x+15 = 0 \stackrel{\div 3}{\Leftrightarrow}$
 $x^2-6x+5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \in D_f$ racine évidente $P = 5$ donc $x_2 = 5 \in D_f \Leftrightarrow S = \{1; 5\}$.

EXERCICE 3

Inéquation du second degré

(4 points)

- 1) $2x^2 - 5x + 3 > 0$: $x_1 = 1$ racine évidente $P = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 5x + 3$	+	0	-	+

$$S =]-\infty; 1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

2) $(2x - 6)(4 - 4x) \geq 0$: racines $x_1 = 3$ ou $x_2 = 1$, coef. $x^2 = -8$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$(2x-6)(4-4x)$	-	0	+	0	-

$S = [1; 3]$

3) $\frac{1}{x} \geq \frac{x}{x+2}$, $D_f = \mathbb{R}^* - \{-2\} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{x(x+2)} \geq 0$

Racines de $-x^2 + x + 2$: $x_1 = -1$ racine évidente $P = -2$ donc $x_2 = 2$

x	$-\infty$	-2	-1	0	2	$+\infty$	
$-x^2+x+2$	-	-	0	+	+	0	-
$x(x+2)$	+	0	-	-	0	+	+
$\frac{-x^2+x+2}{x(x+2)}$	-	+	0	-	+	+	-

$S =]-2; -1] \cup]0; 2]$

EXERCICE 4

Variation d'une fonction du second degré

(2 points)

$$1) f(x) = -2x^2 - 8x + 9 = -2\left(x^2 + 4x - \frac{9}{2}\right) = -2\left[(x+2)^2 - 4 - \frac{9}{2}\right] = -2\left[(x+2)^2 - \frac{17}{2}\right]$$

$$= -2(x+2)^2 + 17$$

2) $f(x)$ est de la forme $f(x) = a(x - \alpha) + \beta$ avec $a = -2$, $\alpha = -2$ et $\beta = 17$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	17	$-\infty$

EXERCICE 5

Changement de variable

(2 points)

$x^4 - 28x^2 + 75 = 0$, on pose $X = x^2$ avec $X \geq 0$, l'équation devient :

$$X^2 - 28X + 75 = 0 \stackrel{\Delta=784-300=484=22^2}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{28+22}{2} = 25 \geq 0 \text{ ou } x_2 = \frac{28-22}{2} = 3 \geq 0$$

On revient à x : $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$ et $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$$S = \{-5; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 5\}.$$

EXERCICE 6

Problème

(2 points)

Soit n le plus petit des entiers. On a alors :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 245 \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 245 \Leftrightarrow 3n^2 + 6n - 240 = 0$$

$$\stackrel{\div 3}{\Leftrightarrow} n^2 + 2n - 80 = 0 \stackrel{\Delta=4+320=324=18^2}{\Leftrightarrow} n_1 = \frac{-2+18}{2} = 8 \text{ ou } n_2 = \frac{-2-18}{2} = -10 \text{ (non retenu)}$$

Les trois entiers cherchés sont 8, 9, 10.