

Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 28 novembre 2024

EXERCICE 1

QCM

(5 points)

- 1) a) : $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 = 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 + 1 = 2n^2 + 3n + 2.$
- 2) c) : $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$
 $= \frac{2n^2 + 2n + 3n + 3 - 2n^2 - 4n - 2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0.$
- 3) d) : $r = \frac{u_{14} - u_3}{14 - 3} = \frac{297}{11} = 27$ et $u_0 = u_3 - 3 \times 27 = 95 - 3 \times 27 = 14.$
- 4) a) : S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 4$. Déterminons le rang du dernier terme :
 $u_n = 131\,072 \Leftrightarrow 4 \times 2^n = 131\,072 \Leftrightarrow 2^n = 32\,768 \Leftrightarrow n = 15.$
 On a alors $S = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}}_{16 \text{ termes}} = 4 \times \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2} = 4(2^{16} - 1) = 262\,140.$
- 5) d) i prend les valeurs de 1 à 4 :
- | | | | | |
|-----|---|----|----|----|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| u | 9 | 21 | 45 | 93 |

EXERCICE 2

Suite arithmétique

(5 points)

- 1) $u_n = u_0 + nr = 8 + 6n.$
- 2) a) $S_n = \text{Nombre de termes} \times \frac{\sum \text{termes extr.}}{2} = (n+1) \times \frac{8 + 8 + 6n}{2} = (n+1)(8 + 3n)$
 $= 8n + 3n^2 + 8 + 3n = 3n^2 + 11n + 8.$
 $S_n = 1702 \Leftrightarrow 3n^2 + 11n + 8 = 1702 \Leftrightarrow 3n^2 + 11n - 1\,694.$
- b) $\Delta = 11^2 + 4 \times 3 \times 1\,694 = 20\,449 = 143^2$. La solution positive est $n = \frac{-11 + 143}{6} = 22.$
- c) On peut écrire le programme suivant qui renvoie la valeur 22.

```

n=0
u=8
s=8
while s < 1702:
    n=n+1
    u=u+6
    s=s+u
print(n)
```

EXERCICE 3**rebonds d'une balle****(5 points)**

1) Après 1 rebond : $1,5 \times 0,8 = 1,2$ m et après 2 rebonds : $1,2 \times 0,8 = 9,6$ m.

2) Comme la balle rebondit à 80 % de sa hauteur, on a :

$$h_{n+1} = h_n \times 0,8 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{h_{n+1}}{h_n} = 0,8.$$

La suite (h_n) est géométrique de raison $q = 0,8$.

3) $h_n = h_0 \times q^n = 1,5 \times 0,8^n$.

4) a) On obtient le programme suivant :

b) La balle fera 33 rebonds avant de ne plus rebondir

```
n=0
h=1,5
while h>=0.001:
    n=n+1
    h=0.8*h
print(n)
```

EXERCICE 4**Suite arithmético-géométrique****(5 points)**

1) $u_1 = 0,6 \times 60 + 80 = 116$ et $u_2 = 0,6 \times 112 + 80 = 149,6$.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,6u_n + 80 - 200 = 0,6u_n - 120 = 0,8\left(u_n - \frac{120}{0,6}\right)$
 $= 0,6(u_n - 200) = 0,6v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,6$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $v_0 = 60 - 200 = -140$.

b) $v_n = v_0 \times q^n = -140 \times 0,6^n$ et $u_n = v_n + 200 = 200 - 140 \times 0,6^n$.

c) $u_8 = 200 - 140 \times 0,6^8 \approx 197,65$ au centième près.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$, par produit et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 200$.