Contrôle de mathématiques

Lundi 27 janvier 2025

Exercice 1

QCM **(4 points)**

Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2-x}}$

   L'ensemble de définition de la fonction f est :

   a) $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ b) $]-\infty\,;2[$ c) $\left]\dfrac{2}{3}\,;2\right[$ d) $\left[\dfrac{2}{3}\,;2\right[$

2) Soit la fonction f telle que : $f(3) = 1$ et $f'(3) = 5$.
   Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 est :
   a) $y = x + 2$ b) $y = x - 8$ c) $y = 5x - 16$ d) $y = 5x - 14$

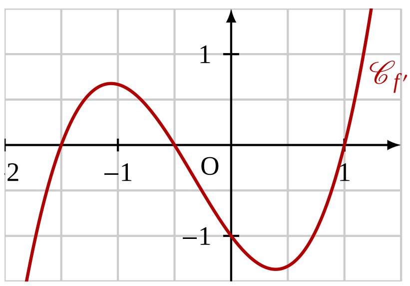
3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

   On peut affirmer que :

   a) $f(6) = 0$
   b) $\forall x \in [0\,;3],\quad f'(x) \geqslant 0$
   c) $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions
   d) $f(x) = 5$ admet exactement deux solutions

4) Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous la **fonction dérivée** f'.



   À partir de cette représentation, on peut dire que la fonction f admet un maximum en :

   a) $x = -\dfrac{3}{2}$ b) $x = -1$ c) $x = -\dfrac{1}{2}$ d) $x = 1$

EXERCICE 2

Fonctions dérivées **(6 points)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable et en factorisant lorsque cela est possible.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$
2) $f(x) = \dfrac{7x-3}{2x+5}$
3) $f(x) = 4x\sqrt{2x-5}$
4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x}$
5) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7}$
6) $f(x) = (5x-3)^3(2x+1)$

EXERCICE 3

Étude d'une fonction **(6 points)**

Soit la fonction f définie sur $[-4\,;\,0[\cup]0\,;\,4]$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x}$

1) Déterminer les coefficients a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$
2) Déterminer $f'(x)$ que l'on factorisera.
3) Résoudre $f'(x) = 0$ puis donner le signe de $f'(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\,;\,0[\cup]0\,;\,4]$.
   On donnera les valeurs en -4 et 4 et les valeurs des extremum.
5) Déterminer l'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse 2.
6) Déterminer les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

EXERCICE 4

Péage d'autoroute **(4 points)**

Une société d'autoroute s'intéresse à l'affluence quotidienne de véhicules au niveau d'un péage

1) Elle modélise le nombre de véhicules présents au péage en fonction de l'heure de la matinée t, par la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par :
$$f(t) = -0,3t^3 + 5,4t^2 - 18t + 19$$
   a) Calculer la fonction dérivée $f'(t)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,12]$
   b) En déduire l'heure de l'affluence maximale de la matinée. Quel est alors le nombre de véhicules présents au péage à cet instant ?
2) Pour l'affluence de fin de journée, le modèle choisi est la fonction g définie sur $[14\,;\,23]$ par :
$$g(t) = -2t^2 + 74t - 630$$
   a) Calculer la fonction dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[14\,;\,23]$.
   b) Le responsable du péage sait que lorsque l'affluence dépasse 50 véhicules, il lui est nécessaire, pour fluidifier le trafic, d'ouvrir toutes les voies de paiement.
   Déterminer la tranche horaire durant laquelle toutes les voies doivent être ouvertes.