Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 27 janvier 2025

Exercice 1

QCM **(4 points)**

1) **d)** : Conditions : $\begin{cases} 3x-2 \geqslant 0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{2}{3}\,;\,2\right[$
2) **d)** : $y = f'(3)(x-3)+f(3) \Leftrightarrow y = 5(x-3)+1 \Leftrightarrow y = 5x-14$
3) **d)** : car a) faux $f(6)$ n'est pas donné, b) faux car sur $[0\,;\,3]$ f est décroissante donc $f'(x) \leqslant 0$ et c) faux car $f(x)=0$ admet trois solutions.
4) **c)** : pour que f admette un maximum la dérivée doit être positive, nulle puis négative ce qui se passe uniquement en $-\dfrac{1}{2}$. (Attention on a tracé la dérivée f' et non f).

Exercice 2

Fonctions dérivées **(6 points)**

1) $f(x) = 4x^3-5x^2+x-1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 12x^2-10x+1$
2) $f(x) = \dfrac{7x-3}{2x+5}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ et se dérive comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$

   $f'(x) = \dfrac{7(2x+5)-2(7x-3)}{(2x+5)^2} = \dfrac{41}{(2x+5)^2}$
3) $f(x) = 4x\sqrt{2x-5}$ dérivable sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$ et se dérive comme $(uv)'$ avec $(\sqrt{u})'$

   $f'(x) = 4\sqrt{2x-5} + 4x \times \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x-5}} = \dfrac{4(2x-5)+4x}{\sqrt{2x-5}} = \dfrac{4(3x-5)}{\sqrt{2x-5}}$
4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\,;\,1\}$ et se dérive comme $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$

   $f'(x) = \dfrac{-3(2x-1)}{x^2(x-1)^2}$
5) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et se dérive comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$

   $f'(x) = \dfrac{4x(x^2+7)-2x(2x^2-3)}{(x^2+7)^2} = \dfrac{2x(2x^2+14-2x^2+3)}{(x^2+7)^2} = \dfrac{34x}{(x^2+7)^2}$
6) $f(x) = (5x-3)^3(2x+1)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et se dérive comme $(uv)'$ avec $(u^n)'$

   $f'(x) = 15(5x-3)^2(2x+1)+2(5x-3)^3 = (5x-3)^2(30x+15+10x-6) = (5x-3)^2(40x+9)$

Exercice 3

Étude d'une fonction **(6 points)**

1) $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x} = -x+3-\dfrac{1}{x}$ donc $a=-1$, $b=3$ et $c=-1$

2) $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-x^2+1}{x^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x^2}$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ et signe de $f'(x)$ = signe de $(1-x^2)$.

4) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-4		-1		0		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{29}{4}$	↘	5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\frac{5}{4}$

5) T_2 : $y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}(x-2) + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + 2$

6) $-x^2 + 3x - 1 = 0 \overset{\Delta=5}{\Leftrightarrow} x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 4

Péage d'autoroute **(4 points)**

1) $f'(t) = -0,9t^2 + 10,8t - 18$

a) $f'(x) = 0$ d'où $\Delta = 10,8^2 - 4 \times 0,9 \times 18 = 51.84 = (7,2)^2$, 2 solutions

$$x_1 = \frac{-10.8+7,2}{-1,8} = 2 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-10,8-7,2}{-1,8} = 10$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0		2		10		12
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	19	↘	$2{,}2$	↗	79	↘	$62{,}2$

b) L'affluence maximale a lieu à 10 h avec 79 véhicules présents au péage.

2) a) $g'(t) = -4t + 74$ donc $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{74}{4} = 18,5$

t	14		$18{,}5$		23
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	14	↗	$54{,}5$	↘	14

b) On doit résoudre : $-2t^2 + 74t - 630 \geqslant 50 \Leftrightarrow -2t^2 + 74t - 680 \geqslant 0$

$\Delta = 74^2 - 4 \times 2 \times 680 = 36 = 6^2$, $x_1 = \dfrac{-74+6}{-4} = 17$ ou $x_2 = \dfrac{-74-6}{-4} = 20$

t	14		17		20		23
$-2t^2+74t-680$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La tranche horaire durant laquelle toutes les voies doivent être ouvertes est la tranche de 17h à 20h