Contrôle de mathématiques

Jeudi 13 février 2025

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La quantité $\mathrm{e}^7 \times \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{3x})^2} - \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2 \right]$ est égale à :

a) 0 b) e^3 c) e^{7-4x} d) e^{7-8x}

2) Pour tous réels a et b, le nombre $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^{-b}}$ est égal à :

a) e^{a-b} b) $\mathrm{e}^{\frac{a}{-b}}$ c) $\dfrac{\mathrm{e}^b}{\mathrm{e}^{-a}}$ d) $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b$

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$. La fonction dérivée f' vérifie :

a) $f'(x) = \mathrm{e}^x$
b) $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$
c) $f'(x) = x\mathrm{e}^x$
d) $f'(0) = 0$

4) L'ensemble solution de l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{4x-3}$ est :

a) $]-\infty\,;\,1] \cup [1\,;+\infty[$
b) $[-3\,;-1]$
c) $[1\,;\,3]$
d) $]-\infty\,;-3] \cup [-1\,;+\infty[$

5) Soit la fonction f, de courbe $\mathscr{C}_f$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = 0$ a pour équation :

a) $y = x - 1$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = x + 1$ d) $y = 2x + 1$

EXERCICE 2

Équations et inéquations **(4 points)**

1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement :

a) $\mathrm{e}^{x^2-5} = e^{-4x}$ b) $\mathrm{e}^x - 5x\mathrm{e}^x = 0$

2) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement

a) $\mathrm{e}^{3x+5} \geqslant \mathrm{e}^{6x-1}$ b) $\mathrm{e}^{x^2} \leqslant (\mathrm{e}^x)^2$

Exercice 3

Fonctions **(5 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par : $f(x)=(-4x+3)\,e^{2x+1}$.
   a) Montrer que sur $[-1\,;\,1]$, on a : $f'(x)=2(1-4x)\mathrm{e}^{2x+1}$.
   b) Résoudre $f'(x)=0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[-1\,;\,1]$.
   Préciser les valeurs exactes des bornes et des extremums éventuels.
   c) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
   d) La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   Si oui en quel(s) point(s) ?
2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4\mathrm{e}^{-3x+2}$
   Montrer que la fonction g vérifie la relation pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)+3g(x)=0$

Exercice 4

Rameur **(6 points)**

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvement d'une personne faisant de l'aviron.

La puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,4]$ par :

$$f(t)=(-8t+32)\mathrm{e}^{t}$$

1) Donner, à l'unité près, la puissance du rameur débutant au bout de 0,15 seconde.
2) Déterminer $f'(t)$ sur $[0\,;\,4]$.
3) Résoudre $f'(t)=0$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,4]$.
4) Quelle est est la puissance maximale, à l'unité près, atteinte par ce rameur ?
5) On voudrait savoir quand, au centième de seconde près, le rameur dépasse pour la première fois une puissance de 100 W. Pour cela, on écrit un programme en langage Python où t est le temps en dixième de seconde et p la puissance en W à l'instant t.

```
from math import*
def f(t):
    return (-8*t+32)*exp(t)
t=0
p=....
while p.......:
    t=t+0.1
    p=.....
print(t)
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il renvoie le temps où le rameur dépasse la puissance de 100 W pour la première fois.
   b) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner le temps affiché.