Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 13 février 2025

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **a)** : $\mathrm{e}^7 \times \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{3x})^2} - \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2\right] = \mathrm{e}^7 \times \left(\dfrac{e^{2x}}{e^{6x}} - e^{-4x}\right) = e^7 \times (\mathrm{e}^{-4x} - \mathrm{e}^{-4x}) = 0$

2) **c)** : $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^{-b}} = \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \dfrac{\mathrm{e}^b}{\mathrm{e}^{-a}}$

3) **b)** : $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x+1) = (x+2)\mathrm{e}^x$

4) **c)** : $\mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{4x-3} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 \leqslant 4x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \leqslant 0.$ on a $x_1 = 1$ racine évidente
$P = 3 \Rightarrow x_2 = 3$, on prend à l'intérieur des racines $S = [1\,;\,3]$.

5) **b)** : $f(0) = 1-2 = -1$ et $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2$
$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = 2x-1$.

EXERCICE 2

Équations et inéquations **(4 points)**

1) a) $\mathrm{e}^{x^2-5} = e^{-4x} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2-5 = -4x \Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0$
$x = 1$ racine évidente, $P = -5$ donc $x_2 = -5$ on a alors $S = \{-5\,;\,1\}$

b) $\mathrm{e}^x - 5x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(1-5x) = 0 \overset{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\neq 0}{\Leftrightarrow} 1-5x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

2) a) $\mathrm{e}^{3x+5} \geqslant \mathrm{e}^{6x-1} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} 3x+5 \geqslant 6x-1 \Leftrightarrow -3x \geqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant 2 \Leftrightarrow S =]-\infty\,;\,2]$

b) $\mathrm{e}^{x^2} \leqslant (\mathrm{e}^x)^2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{2x} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 \leqslant 2x \Leftrightarrow x^2-2x \leqslant 0 \Leftrightarrow x(x-2) \leqslant 0$
On prend à l'intérieur des racines 0 et 2 donc $S = [0\,;\,2]$.

EXERCICE 3

Fonctions **(5 points)**

1) a) $f'(x) = -4\mathrm{e}^{2x+1} + (-4x+3)(2\mathrm{e}^{2x+1}) = 2\mathrm{e}^{2x+1}(-2-4x+3) = 2\mathrm{e}^{2x+1}(1-4x)$.

b) $f'(x) = 0 \overset{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{2x+1}\neq 0}{\Leftrightarrow} 1-4x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.
Signe $f'(x) =$ signe $(1-4x)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{2x+1} > 0$.

x	-1		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$7e^{-1}$	$\nearrow$	$2e^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$-e^3$

c) On a $f(0) = 3\mathrm{e}$ et $f'(0) = 2\mathrm{e}$, d'où
$\mathrm{T}_0 \;:\; y = f'(0)x + f(0) \;\Leftrightarrow\; y = 2\mathrm{e}\,x + 3\mathrm{e}$.

d) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (-4x+3)\,\mathrm{e}^{2x+1} = 0 \overset{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{2x+1}\neq 0}{\Leftrightarrow} -4x+3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{3}{4}$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f coupe l'axe des abscisses en $x = \dfrac{3}{4}$.

2) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\;\; g'(x) + 3g(x) = 4(-3)\mathrm{e}^{-3x+2} + 3\times 4\mathrm{e}^{-3x+2} = -12\mathrm{e}^{-3x+2} + 12\mathrm{e}^{-3x+2} = 0$

Exercice 4

Rameur **(6 points)**

1) $f(1,5) = (-12+32)\mathrm{e}^{1,5} = 20\mathrm{e}^{1,5} \approx 89,6$
La puissance du rameur débutant au bout de 0,15 seconde est de 90 W.

2) $f'(t) = -8\mathrm{e}^t + (-8t+32)\mathrm{e}^t = (-8t+24)\mathrm{e}^t = 8(-t+3)\mathrm{e}^t$.

3) $f'(t) = 0 \overset{\forall t\in[0\,;4],\ \mathrm{e}^t\neq 0}{\Leftrightarrow} x = 3$.
Signe $f'(t)$ = signe $(-x+3)$ car $\forall t \in [0\,;\,4],\;\; \mathrm{e}^t > 0$. on a alors :

t	0		3		4
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	32	↗	$8\mathrm{e}^3$	↘	0

4) La puissance maximale atteinte par le rameur est de $8\mathrm{e}^3 \approx 161$ W au bout de 0,3 s.

5) a) On obtient l'algorithme suivant :

```
from math import*
def f(t):
    return (-8*t+32)*exp(t)
t=0
p=f(0)
while p<=100:
    t=t+0.1
    p=f(t)
print(t)
```

b) On trouve $t = 1,7$
Le rameur débutant dépasse une puissance de 100 W après 0,17 s.