Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 5 mai 2025

EXERCICE 1

Alignement **(5 points)**

1) $\overrightarrow{AB} = \left(-2+\dfrac{7}{2}\,;\,5-2\right) = \left(\dfrac{3}{2}\,;\,3\right)$ et $\overrightarrow{CD} = \left(3-5\,;\,\dfrac{5}{2}-\dfrac{13}{2}\right) = (-2\,;\,-4)$.

2) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}\times 4-(-2)\times 3 = 6-6 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

(AB)//(CD) et donc ABCD est un trapèze.

3) Soit $I(x\,;\,y)$: $\overrightarrow{IA} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{2}-x \\ 2-y \end{pmatrix} = \dfrac{3}{4}\begin{pmatrix} 3-x \\ \dfrac{5}{2}-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{2}-x = \dfrac{3}{4}(3-x) & (\times 4) \\ 2-y = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{5}{2}-y\right) & (\times 8) \end{cases}$

$\begin{cases} -14-4x = 9-3x \\ 16-8y = 15-6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -14-9 \\ 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

4) $J\left(-\dfrac{11}{4}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$ et $K = \left(4\,;\,\dfrac{9}{2}\right)$

5) $\det(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) = \begin{vmatrix} -\dfrac{11}{4}+23 & 4+23 \\ \dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{81}{4} & 27 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 81-81 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires donc I, J et K sont alignés.

EXERCICE 2

Produits scalaires **(2 points)**

1) B projeté orthogonal de A sur (BD) donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}^2 = DB^2 = 225$

2) B projeté orthogonal de D sur (AB) donc

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA} = (-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 64$$

3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}^2 = -CB^2 = -36$

4) $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DB}$ colinéaires de sens contraire donc :

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DB} = -CB\times DB = -90$$

EXERCICE 3

Projeté orthogonal **(4 points)**

1) $C(0\,;\,3)$, $D(-2\,;\,0)$ et $M(3\,;\,-2)$.

2) $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6-6 = 0$ donc $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{DC}$

La droite (OM) est perpendiculaire à la droite (DC).

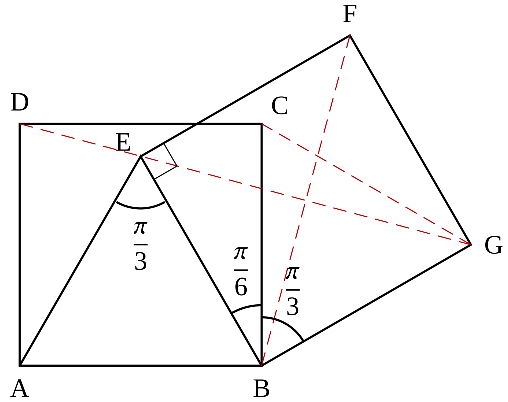
3) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = -6 + 15 = 9.$

4) Comme H est le projeté orthogonal de M sur (DC), alors $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = \text{CD} \times \text{CH}$.

$\text{CH} = \dfrac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM}}{\text{CD}} = \dfrac{9}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{9}{\sqrt{13}} \approx 2,50.$

Exercice 4

Orthogonalité **(6 points)**



1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \text{BC} \times \text{BE} \times \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d'où $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \text{BC} \times \text{BE} \times \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

3) $\widehat{\text{GBC}} = \dfrac{\pi}{3}$. BGC est isocèle avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ donc BGC est équilatéral.

4) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = \text{BC} \times \text{BG} \times \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = -\dfrac{1}{2}.$

5) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = -\text{EA} \times \text{EF} \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\text{EA} \times \text{EF} \times \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}}_{=\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF}$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ donc $(\text{DE}) \perp (\text{BF})$.

On peut en déduire alors que les points D, E et G sont alignés.

Exercice 5

Triangle **(4 points)**

1) a) Relation d'Al Kashi : $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2\text{AB} \times \text{AC} \cos\widehat{\text{BAC}}$

b) $\cos\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{\text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \text{BC}^2}{2\text{AB} \times \text{AC}} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \widehat{\text{BAC}} = \arccos\dfrac{1}{7} \approx 81,8^\circ$

2) $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2\text{AB} \times \text{AC} \cos\widehat{\text{BAC}} = 16 + 6,25 - 2 \times 4 \times 2,5 \times \dfrac{1}{2} = 12,25.$

D'où $\text{BD} = \sqrt{12,25} = 3,5.$

$\text{DC}^2 = \text{BD}^2 + \text{BC}^2 - 2\text{BD} \times \text{BC} \cos 75^\circ \approx 12.25 + 9 - 2 \times 3,5 \times 3 \times 0,259 \approx 15,811.$

D'où $\text{DC} = \sqrt{15,811} = 3,98.$