Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 27 mars 2025

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **c)** : Les événements étant indépendants, pour le deuxième enfant, on une chance sur deux d'avoir un garçon.

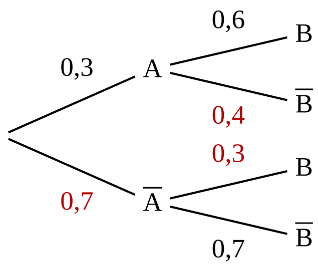
2) **d)** : on complète le tableau

	A	$\overline{\text{A}}$	Total
B	40	20	60
$\overline{\text{B}}$	10	30	40
Total	50	50	100

$$p_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{A})} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5} \neq \dfrac{2}{5} \neq \dfrac{2}{3}$$

$$p_{\text{B}}(\text{A}) == \dfrac{\text{A} \cap \text{B}}{p(\text{B})} = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$$

3) **b)** : On complète l'arbre :



$$p(\text{B}) = p(\text{A} \cap \text{B}) + p(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = 0,18 + 0,21 = 0,39$$

$$p_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{A})} = \dfrac{0,18}{0,3} = \dfrac{3}{5} = 0,6$$

$$p_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{B})} = \dfrac{0,18}{0,39} = \dfrac{6}{13} \neq 0,6$$

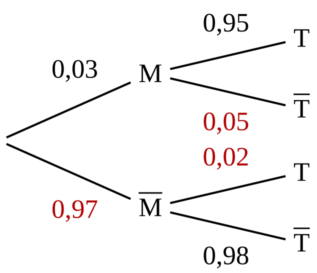
x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,100	0,425	$0,402$	0,073

4) **a)** : $\text{E}(X) = 0 + 0,425 + 0,402 \times 2 + 0,073 \times 3 = 1,448$

5) **a)** : $\text{V}(X) = 0 + 0,425 + 0,402 \times 4 + 0,076 \times 9 - 1,448^2 \approx 0,593$

EXERCICE 2

Maladie et test **(5 points)**



1) $p(\text{M}) = 0,03$, $p_{\text{M}}(\text{T}) = 0,95$, $p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 0,02$.

2) a) $p(\text{M} \cap \text{T}) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) = 0,03 \times 0,95 = 0,0285$

b)
$$\begin{aligned} p(\text{T}) &= p(\text{M} \cap \text{T}) + p(\overline{\text{M}} \cap \text{T}) \\ &= 0,0285 + p(\overline{\text{M}}) \times p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) \\ &= 0,0285 + 0,97 \times 0,02 = 0,0479 \end{aligned}$$

c) $p(\text{M} \cup \text{T}) = p(\text{M}) + p(\text{T}) - p(\text{M} \cap \text{T}) = 0,03 + 0,0479 - 0,0285 = 0,0494$

3) $$p_{\overline{\text{T}}}(\overline{\text{M}}) = \dfrac{p(\overline{\text{M}} \cap \overline{\text{T}})}{p(\overline{\text{T}})} = \dfrac{p(\overline{\text{M}}) \times p_{\overline{\text{M}}}(\overline{\text{T}})}{1 - p(\text{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0479} \approx 0,998.$$

Si le test est négatif, on est quasi-sûr que la personne n'est pas malade à 0,2 % près.

EXERCICE 3

Urne **(4 points)**

- Il y a 6 boules dont le numéro est un multiple de 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18.
- Il y 15 boules dont le numéro est supérieur à 5 : de 6 à 20.
- Il y a 5 boules dont le numéro est un multiple de 3 supérieur à 5 : 6, 9, 12, 15, 18

1) $p(\mathrm{A}) = \dfrac{6}{20} = 0,3$, $p(\mathrm{B}) = \dfrac{15}{20} = 0,75$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{5}{20} = 0,25$

2) $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{0,25}{0,75} = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \dfrac{0,25}{0,3} = \dfrac{5}{6}$

3) $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) \overset{\text{De Morgan}}{=} p(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{B} + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$= 1 - 0,3 - 0,75 + 0,25 = 0,2$

$p(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) \overset{\text{De Morgan}}{=} p(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}) = 1 - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$

EXERCICE 4

Jetons **(6 points)**

1) Les valeurs prisent par X sont : -6, -1 et 4.

2) a) Pour un gain de -1 €, on doit tirer un jeton blanc et un jeton rouge. On peut tirer le jeton blanc au premier ou au second tirage donc 2 choix possibles.

$p(X = -1) = 2 \times \dfrac{10}{15} \times \dfrac{5}{14} = 2 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{14} = \dfrac{10}{21}$

b) Pour un gain de -6 €, on doit tirer deux jetons rouges : $p(X = -6) = \dfrac{5}{15} \times \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{21}$

Pour un gain de 4 €, on doit tirer deux jetons blancs : $p(X = 4) = \dfrac{10}{15} \times \dfrac{9}{14} = \dfrac{3}{7}$.

x_i	-6	-1	4
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{10}{21}$	$\dfrac{3}{7}$

3) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{-6 \times 2 - 1 \times 10 + 4 \times 9}{21} = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3} \approx 0,67$.

Le joueur peut espérer gagner en moyenne 0,67 € par partie.

4) Par le même raisonnement, on obtient les probabilités suivantes :

- $p(X = -6) = \dfrac{7}{17} \times \dfrac{6}{16} = \dfrac{21}{136}$
- $p(X = -1) = 2 \times \dfrac{10}{17} \times \dfrac{7}{16} = \dfrac{70}{136} = \dfrac{35}{68}$
- $p(X = 4) = \dfrac{10}{17} \times \dfrac{9}{16} = \dfrac{45}{136}$

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{-6 \times 21 - 70 + 4 \times 45}{136} = -\dfrac{16}{136} = -\dfrac{2}{17} \approx -0,12$

Le jeu n'est plus favorable au joueur car il perd en moyenne 0,12 € par partie.