Contrôle second degré et suites / durée 1h

Jeudi 19 octobre

Corrigé

Exercice 1 (3 points)

Résoudre les équations du second degré suivantes. On privilégiera les solutions « élégantes », c'est-à-dire que le discriminant sera calculé uniquement si nécessaire.

a) $-x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times(-5) = 4 - 20 = -16 < 0$ Donc $S = \varnothing$

b) $5x^2 + 4x - 1 = 0$

Ici on constate que $4 = 5 + (-1)$ donc on est dans un cas de solution évidente.

$x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{-(-1)}{5} = \frac{1}{5}$ $S = \left\{-1\,;\frac{1}{5}\right\}$

c) $4x^2 - 3x = 0$

$x(4x-3) = 0$ ssi $x = 0$ ou $4x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{3}{4}$ $S = \left\{0\,;\frac{3}{4}\right\}$

d) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$

Constatons déjà que les deux valeurs interdites sont 1 et 2.

On résout donc sur $R/\{1\,;2\}$.

On met tout sur un même dénominateur.

$$\frac{x(x-2)+x-1}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)} = 0$$

Le numérateur s'annule pour deux valeurs ($\Delta = 5$).

$$S = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$$

Exercice 2

Résoudre les deux inéquations suivantes :

a. $3x^2 - 24x + 48 \geq 0$
b. $5x^2 - 3x - 1 > 0$

La première :

$$3x^2 - 24x + 48 = 3(x^2 - 8x + 16)$$

Donc l'inéquation est équivalente à :

$$x^2 - 8x + 16 \geq 0 \; ou \; encore \; (x-4)^2 \geq 0$$

Un carré est toujours positif donc S=R

La deuxième :

Calculons le discriminant.

$$\Delta = 9 + 4 \times 5 = 29 \; (pas \; sympa!)$$

Calculons donc les racines.

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{29}}{10} \; et \; x_2 = \frac{3+\sqrt{29}}{10}$$

L'expression est positive à l'extérieur des racines :

$$S =]-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{10}[\cup]\frac{3+\sqrt{29}}{10}\; ; +\infty[.$$

Exercice 3

Ecrire chaque fonction polynôme sous forme canonique.

En déduire le tableau de variations correspondant à chaque fonction.

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 1$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 2$$

Pour f. Calculons α et β.

$$\alpha = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\beta = f(-2) = 8 - 16 - 1 = -9$$

On en déduit la forme canonique :

$$f(x) = 2(x+2)^2 - 9$$

Tableau de variations donné en classe.

Pour g. Calculons α et β.

$$\alpha = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$\beta = f(1) = -1 + 2 + 2 = 3$$

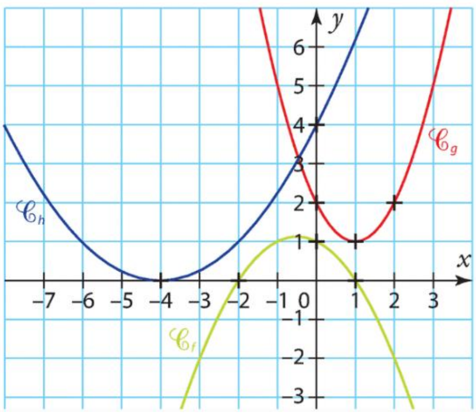
On en déduit la forme canonique :

$$f(x) = -(x-1)^2 + 3$$

Exercice 4 (avec un énoncé plus développé)

Trois fonctions polynômes de degré 2 ont été représentées ci-dessous : les fonctions f, g et h.

Pour chaque fonction, déterminer, **lorsqu'elle existe**, sa forme factorisée.



- La courbe de la fonction *f* coupe l'axe des abscisses en -2 et en 1.

Donc ; $f(x) = a(x+2)(x-1)$, avec $f(0)=1$

D'où : $a \times 2 \times (-1) = 1 \Leftrightarrow \quad a = \frac{-1}{2}$

Ainsi : $f(x) = \frac{-1}{2}(x+2)(x-1)$

- La courbe de la fonction *g* est n'a aucun contact avec l'axe des abscisses, donc cette fonction n'admet pas de racine et n'est pas factorisable.
- La courbe de la fonction *h*, touche l'axe des abscisses en 4.

On a donc sa forme canonique : $h(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec : $\alpha = -4$ et $\beta = 0$

D'où : $h(x) = a(x+4)^2$ or : $\mathrm{h}(0) = 4$

Donc : $a \times 4^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$

La forme factorisée de la fonction est donc : $h(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2$