

LA FONCTION CARRÉE ET LA FONCTION INVERSE

Fonction carrée

EXERCICE 1

f est la fonction carrée. Calculer les images par f des nombres suivants :

- a) 4 b) 100 c) 0 d) $-\frac{3}{4}$ e) 0,1

EXERCICE 2

f est la fonction carrée et \mathcal{P} sa parabole représentative. Expliquer graphiquement puis algébriquement pourquoi :

- a) il existe deux réels qui ont 4 comme image par f .
b) il n'existe pas d'image pour -1

EXERCICE 3

f est la fonction carrée. Déterminer les antécédents par f , lorsque cela est possible, de chacun des réels suivants :

- a) 1 b) -4 c) 0 d) $\frac{5}{4}$ e) 100

EXERCICE 4

Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction carrée sur l'intervalle I suivant en précisant la fenêtre utilisée :

- a) $I = [-0,3; 0,3]$ b) $I = [100; 1\ 000]$

EXERCICE 5

Citer la propriété de la fonction carrée qui permet d'affirmer sans calcul que :

- a) $5,15 \leq 5,825$ donc $5,15^2 \leq 5,825^2$
b) $-3,52 \leq -3,07$ donc $(-3,52)^2 \geq (-3,07)^2$

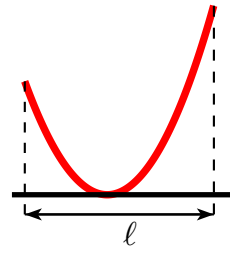
EXERCICE 6

Soit f la fonction carrée. Si $x \in [1; 3]$ à quel intervalle appartient $f(x)$. On pourra s'aider d'un tableau de variation.

EXERCICE 7

La schématisation d'une sculpture construite à l'aide de la fonction carrée est haute de 5 m d'un côté et de 3 m de l'autre.

Calculer la valeur approchée au cm près de sa largeur ℓ .

**EXERCICE 8****Construction d'une parabole**

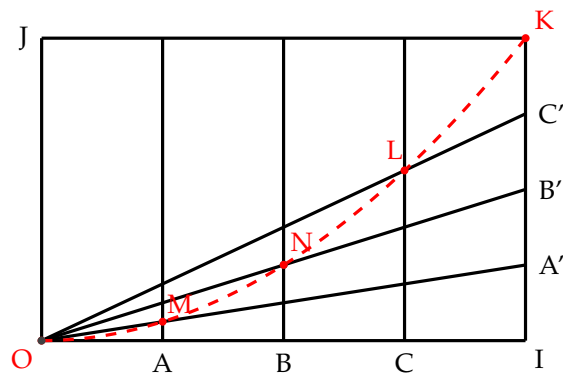
Voici un procédé utilisé par les tailleurs de pierres pour tracer une parabole sur un bloc rectangulaire.

Les points A, B, C du segment [OI] sont tels que :

$$OA = AB = BC = CI$$

Les points A', B', C' du segment [IK] sont tels que :

$$IA' = A'B' = B'C' = C'K$$



Justifier que les points O, M, N, L et K appartiennent à la courbe de la fonction carrée. (On pourra utiliser le théorème de Thalès)

Fonction trinôme**EXERCICE 9**

Déterminer la forme canonique puis les variations des fonctions trinômes f suivantes :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

4) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$

2) $f(x) = x^2 + x - 6$

5) $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$

3) $f(x) = x^2 + 6x + 12$

6) $f(x) = -x^2 + 7x - 10$

EXERCICE 10

Soit l'algorithme suivant :

Choisir un nombre.
Lui ajouter 3.
Élever le résultat au carré.
Multiplier le résultat par -2 .
Soustraire au résultat 4.
Afficher le résultat

- 1) Traduire cet algorithme à l'aide d'une fonction où le nombre de départ est x
- 2) Proposer un programme sur votre calculatrice.
- 3) Comment traduire la fonction $f(x) = 2(x - 5)^2 + 6$ à l'aide d'un algorithme ayant la même structure que celui ci-dessus.

EXERCICE 11

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - 3$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2; 2]$.
- 2) Afficher à l'écran de votre calculatrice la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$.
Conjecturer un élément de symétrie de cette courbe.
- 3) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 12

Dans chaque cas, dresser le tableau de variation des fonctions trinôme suivantes :

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| 1) $f_1(x) = 3(x - 1)^2 - 4$ | 3) $f_3(x) = -2x^2 + 7$ |
| 2) $f_2(x) = 4 - 3(x - 1)^2$ | 4) $f_4(x) = -5 + 3x^2$ |

EXERCICE 13

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$

- 1) Dresser le tableau de variation de f
- 2) Sans calcul, comparer, si possible :
 - a) $f(-1)$ et $f(2)$
 - b) $f(1)$ et $f(4)$
 - c) $f(20)$ et $f(19.7)$
- 3) a désigne un réel de l'intervalle $] -\infty; 3]$. Comparer $f(a)$ et $f(a - 1)$.

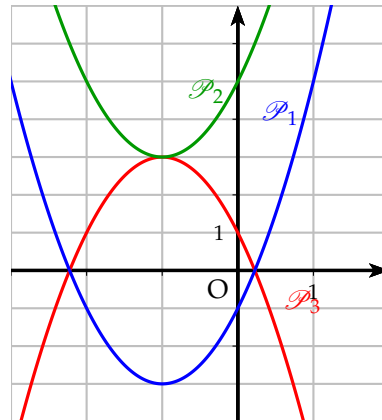
EXERCICE 14

Sans utiliser la calculatrice, associer à chacune des fonctions suivantes la représentation graphique qui lui correspond, en justifiant votre réponse.

$$f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$$

$$g(x) = 2(x + 1)^2 - 3$$

$$h(x) = 2(x + 1)^2 + 3$$

**EXERCICE 15**

Dans chaque cas, dire si la parabole, représentant la fonction f , est tournée « vers le haut » ou « vers le bas ». Donner les coordonnées du sommet et tracer sur votre calculatrice la parabole en adaptant la fenêtre afin d'obtenir une représentation satisfaisante.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $f_1(x) = -(x + 2)^2 - 3$ | c) $f_3(x) = -4(x - 3,5)^2 + 1,5$ |
| b) $f_2(x) = \frac{25}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ | d) $f_4(x) = 7 + x^2$ |

EXERCICE 16**Déterminer un trinôme**

f est un polynôme du second degré. \mathcal{P} est la parabole représentant f dans un repère orthogonal.

Dans chacun des cas suivants, traiter les informations pour retrouver l'expression de $f(x)$.

- \mathcal{P} a pour sommet $S(2; 3)$. Le point $A(0; -1)$ appartient à \mathcal{P} .
- \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux points $A(-2; 0)$ et $B(1; 0)$, et l'axe des ordonnées au point $C(0; 2)$.
- \mathcal{P} admet pour axe de symétrie la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $A(1; 0)$. \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses en l'origine O du repère et passe par le point $B(3; 1)$.

EXERCICE 17**Résistance**

Sur une Peugeot 406 1,6i, les variations de la résistance R (en Ω) de la sonde de «température d'eau» en fonction de la température T (en $^{\circ}\text{C}$) du liquide dans le circuit de refroidissement sont données par :

$$R = 0,58T^2 - 116T + 6000 \quad (\text{avec } 0 \leq T \leq 150).$$

- Vérifier que $R = 0,58(T - 100)^2 + 200$.
- Quel est le minimum de cette résistance ? A quelle température est-il atteint ?

EXERCICE 18

f est une fonction trinôme. On donne le tableau de variation suivant :

x	-3	1	5
$f(x)$		1,85	-2,15

- Que vaut $f(-3)$? Justifier
- Donner l'expression de $f(x)$.

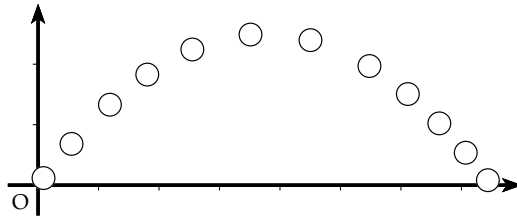
EXERCICE 19**Balle de ping-pong**

L'objectif de cet exercice est de trouver l'expression de la fonction f associée à la trajectoire de la balle de ping-pong.

- Partie de l'origine du repère, la balle arriverait 150 cm plus loin sans filet.
 - Elle s'est élevée de 50 cm de haut.

Traiter ces informations pour déterminer $f(x)$ sachant que f est une fonction polynôme de degré 2.

- b) Sachant que le filet se trouve à 120 cm de l'origine et que sa hauteur est 15,25 cm, la balle est-elle passée au-dessus du filet ?



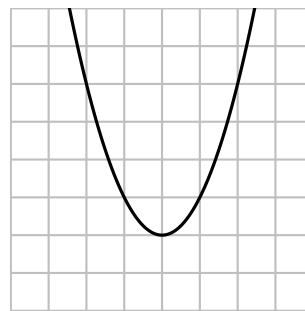
EXERCICE 20

Placer les axes

Marie a représenté ci-contre la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Marie a oublié de dessiner les axes du repère. Seriez vous capable de les replacer sur la figure ?



EXERCICE 21

Définition d'une parabole

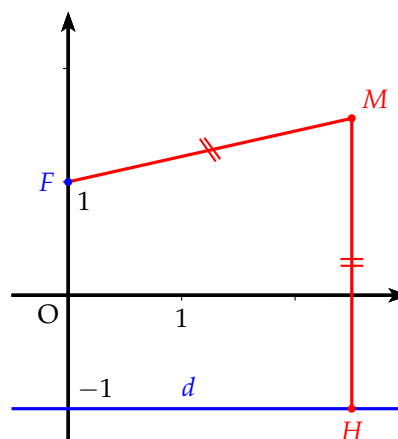
En géométrie, on appelle parabole une courbe constituée des point M équidistants d'un point F appelé foyer et d'une droite fixe.

On donne le foyer de la parabole $F(0;1)$ et la droite d fixe d'équation $y = -1$. H est le projeté orthogonal de M sur la droite d . On obtient alors la figure ci-contre :

Comme les point M sont équidistants de F et de la droite d , on peut écrire :

$$MF = MH$$

- Pourquoi M est sur la médiatrice de $[FH]$?
- Si H est un point de d , indiquer une construction du point M associé à H .



Fonction inverse

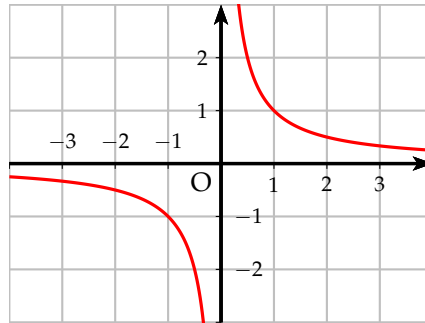
EXERCICE 22

f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels suivants :

- a) $\frac{5}{7}$ b) $-\frac{1}{9}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$ e) 10^{-6} f) 10^5

EXERCICE 23

Voici la courbe représentative de la fonction inverse, dans un repère. Expliquer graphiquement



- a) Pourquoi il n'existe qu'un seul réel dont l'inverse est 2. Quel est ce réel ?
 b) Pourquoi il n'existe qu'un réel dont l'inverse est -3 . Quel est ce réel ?
 c) Pourquoi il n'existe pas de réel dont l'inverse est 0 ?

EXERCICE 24

f est la fonction inverse. Déterminer les antécédents par f de :

- a) $\frac{4}{3}$ b) 0,02 c) 10^{-5} d) 2×10^4

Que fait-on comme fonction pour trouver ces antécédents ?

EXERCICE 25

Afficher sur l'écran de votre calculatrice, la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle I indiqué, en précisant la fenêtre utilisée.

- a) $I = [-1; -0,1]$ b) $I = [10, 100]$

EXERCICE 26

Citer la propriété de la fonction inverse qui permet d'affirmer sans calcul que :

- a) $3,14 \leq 3,151$ donc $\frac{1}{3,14} \geq \frac{1}{3,151}$
 b) $-0,2 \leq -0,152$ donc $-\frac{1}{0,2} \geq -\frac{1}{0,152}$

EXERCICE 27

Résoudre les inéquations suivantes en s'aidant de la courbe de la fonction inverse

- a) $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{x} \leq -3$ c) $\frac{1}{x} > -2$

EXERCICE 28

À l'intérieur d'un piston, la pression P en bars, et le volume V en litres, suivent la loi $P \times V = 1$.

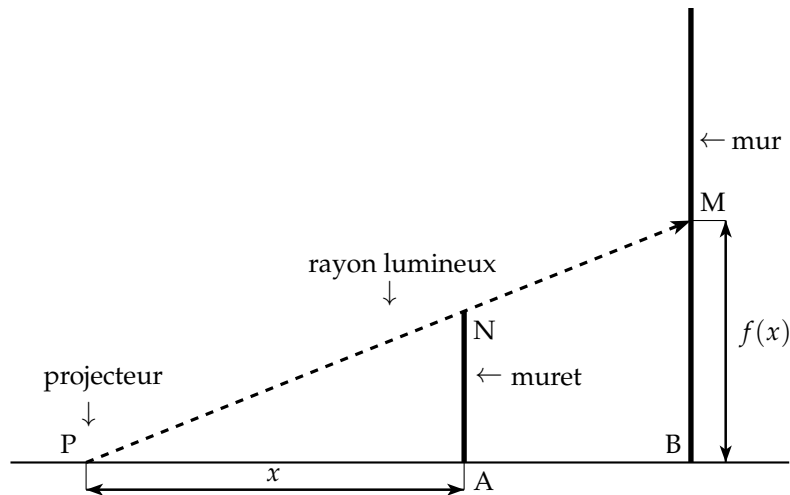
- a) Expliquer pourquoi cette loi est liée à la fonction inverse.

- b) Sachant qu'à l'intérieur du piston, le volume peut varier entre 0,5 et 5 litres, quelles sont les valeurs possibles pour la pression ?

EXERCICE 29

Un petit muret

Un petit muret AN de 2 mètres de hauteur est situé à 3 mètres d'un mur BM. Au sol un projecteur mobile est dirigé sur ce muret et le mur derrière ; l'ombre du muret arrive en M sur le mur.



- 1) Montrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $BM = 2 + \frac{6}{AP}$
- 2) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \frac{6}{x}$.
 - a) Déterminer les variations de f sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
 - b) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	6	15
$f(x)$						
 - c) Représenter la fonction f pour les valeurs de x situées dans l'intervalle $]0; 15]$. On prendra comme unité le cm sur les deux axes.
- 3) On cherche où situer le projecteur afin qu'une marque située à 3,5 m de hauteur sur le mur ne soit jamais éclairée. Quelles sont les valeurs de x possibles ?

EXERCICE 30

Fonctions homographiques et hyperboles

Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

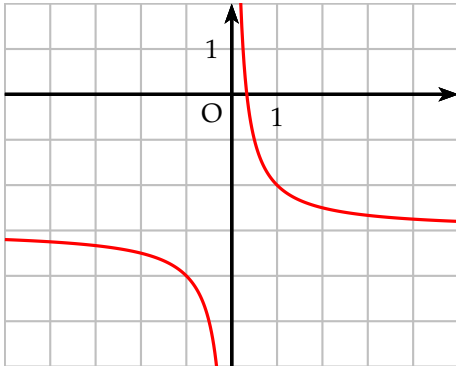
- $f_1(x) = 2 + \frac{1}{x}$
- $f_2(x) = 2 - \frac{1}{x}$

• $f_3(x) = -3 + \frac{1}{x}$

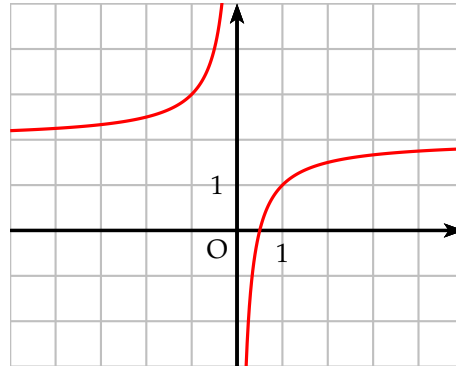
• $f_4(x) = -3 - \frac{1}{x}$

Associer chaque fonction à son graphique en justifiant sa réponse.

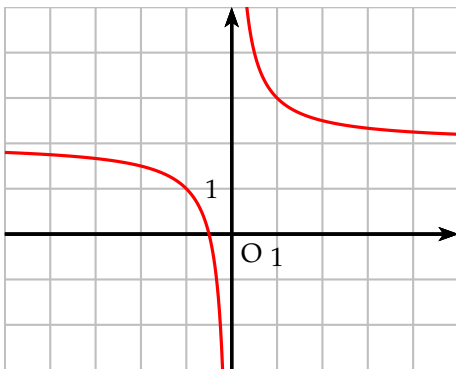
Graphique A



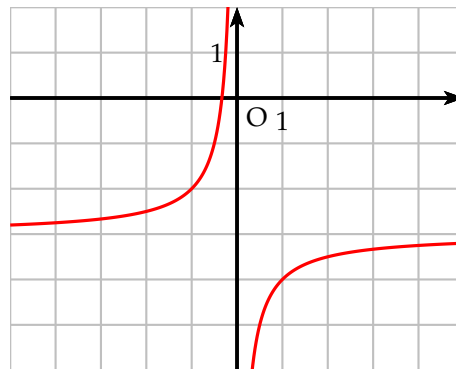
Graphique C



Graphique B



Graphique D



Algorithme

EXERCICE 31

Donner l'écriture de la fonction correspondante aux opérations suivantes

- 1) On prend l'inverse de la somme de x et de 2.
- 2) On ajoute 3 à l'inverse de x .
- 3) On ajoute 1 à l'inverse de la différence de x et de 5.

EXERCICE 32

Déterminer la fonction f associée aux programmes suivants :

Variables

X, Y réels

Initialisation

Lire X

Traitement

$X - 3 \rightarrow Y$

$4Y \rightarrow Y$

$\frac{1}{Y} \rightarrow Y$

Sortie

Afficher Y

Variables

X, Y réels

Initialisation

Lire X

Traitement

$5X \rightarrow Y$

$\frac{1}{Y} \rightarrow Y$

$Y + 5 \rightarrow Y$

Sortie

Afficher Y

EXERCICE 33

Pour chaque fonction donnée ci-dessous, donner un programme similaire au programme de l'exercice précédent.

$$f(x) = \frac{8}{x+3}$$

$$g(x) = 3 + \frac{1}{7x+1}$$

EXERCICE 34

x est un nombre de l'intervalle $[-3; -1]$

- 1) Compléter les programmes de calculs suivants en précisant à chaque étapes l'opération qui est faite.

$$x \xrightarrow{\dots} \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{on multiplie par 3}} \dots \xrightarrow{\dots} 5 + \frac{3}{x}$$

$$x \xrightarrow{\text{on multiplie par 2}} \dots \xrightarrow{\dots} 2x + 1 \xrightarrow{\text{on prend l'inverse}} \dots$$

- 2) Utiliser ces programmes de calcul pour donner un encadrement des nombre :

$$A = 5 + \frac{3}{x} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2x+1}$$

EXERCICE 35

x est un nombre de l'intervalle $[5; 10]$

Procéder comme l'exercice précédent pour donner un encadrement des nombres :

$$M = \frac{5}{x-3} \quad \text{et} \quad N = 2 - \frac{7}{x}$$

EXERCICE 36**Campagne de publicité****Partie A**

Un entreprise souhaite promouvoir une nouvelle sorte de céréales pour le petit-déjeuner. L'entreprise estime qu'après x semaines de publicité, le pourcentage de personnes connaissant le nom de ces céréales est donné par :

$$p(x) = \frac{80x}{x+1}$$

- 1) Calculer $p(4)$. En déduire le pourcentage de personnes ignorant le nom du produit après quatre semaines de publicité.
- 2) L'écriture de $p(x)$ est-elle compatible avec les affirmations suivantes :
 - a) Avant la campagne de publicité, personne ne connaissait le nom de ces céréales.
 - b) Après 15 semaines de publicité, tout le monde connaît le nom de ces céréales.

Partie B

L'entreprise envisage une campagne de publicité de 10 semaines pour promouvoir ce produit.

On s'intéresse donc à la fonction p définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$p(x) = \frac{80x}{x+1}$$

Tracer la fonction p sur votre calculette. Vous prendrez comme fenêtre graphique :

$$0 \leq X \leq 10 \quad \text{et} \quad 0 \leq Y \leq 90 \quad \text{unité graphique : 1 pour } X \text{ et 10 pour } Y$$

Utiliser votre calculatrice pour répondre aux questions suivantes :

- 1) Déterminer graphiquement la durée nécessaire pour que le pourcentage $p(x)$ devienne supérieur ou égal à 60%.
- 2) Déterminer graphiquement combien de semaines supplémentaires de publicité sont nécessaires pour que ce pourcentage dépasse 70%.
- 3) Le directeur de marketing de cette entreprise affirme que la campagne de publicité aura un fort impact pendant les trois premières semaines, et qu'au-delà, ce sera beaucoup plus limité.

Au vu du graphique, cette affirmation vous semble-t-elle justifiée ?

EXERCICE 37

Algorithme de Kuwarizmi

On donne l'algorithme suivant en pseudo-code

Variables	
A, B, Q, X	
Initialisation	
Lire A, B	
Traitement	
$\frac{A}{2} \rightarrow Q$	
$Q^2 \rightarrow X$	<i>valeur</i> X_1
$X + B \rightarrow X$	<i>valeur</i> X_2
$\sqrt{X} \rightarrow X$	<i>valeur</i> X_3
$X - Q \rightarrow X$	<i>valeur</i> X_4
Sortie	
Afficher X	

- 1) Remplir le tableau suivant :

A	B	Q	X_1	X_2	X_3	X_4	Résultat
10	96						
8	2 009						

- 2) Rentrer cet algorithme dans votre calculette et retrouver les résultats du tableau.
- 3) Résoudre en utilisant la forme canonique les équations suivantes :
 - a) $x^2 + 10x = 96$
 - b) $x^2 + 8x = 2\,009$
 - c) Expliquer ce que calcule cet algorithme
 - d) Trouver alors, à l'aide du programme de votre calculatrice, la solution positive de l'équation : $x^2 - 84x = 3565$