Pivot de Gauss pour la résolution d'un système 3x3

La méthode

Le but du pivot de Gauss, dans un système 3×3 ou supérieur, consiste à transformer le système initial (S) en un système triangulaire (S′), appelée échelonnement, par combinaison linéaire des lignes.

À partir de (S′), on obtient les inconnues en remontant de système de la dernière ligne à la première.

Exemple 1 : on donne le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & L_1 \\ -x + 2y - z = 2 & L_2 \\ - y + 2z = 3 & L_3 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \begin{cases} x - y + 0z = \dfrac{1}{2} & L_1 \\ -x + 2y - z = 2 & L_2 \\ - y + 2z = 3 & L_3 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\Leftrightarrow \\ L_3 \to L_3}}{L_2 + L_1 \to L_2} \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}y + 0z = \dfrac{1}{2} & L_1 \\ 0x + \dfrac{3}{2}y - z = \dfrac{5}{2} & L_2 \\ 0x - y + 2z = 3 & L_3 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\frac{2}{3}L_2 \to L_2} \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}y + 0z = \dfrac{1}{2} & L_1 \\ 0x + y - \dfrac{2}{3}z = \dfrac{5}{3} & L_2 \\ 0x - y + 2z = 3 & L_3 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\Leftrightarrow \\ L_3 + L_2 \to L_3}}{(S')} \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}y + 0z = \dfrac{1}{2} & L_1 \\ 0x + y - \dfrac{2}{3}z = \dfrac{5}{3} & L_2 \\ 0x + 0y + \dfrac{4}{3}z = \dfrac{14}{3} & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_3 \ : \ z = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2} \\ L_2 \ : \ y = \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{2} = 4 \\ L_1 \ : \ x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 4 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

On obtient la solution : $\left(\dfrac{5}{2} ; 4 ; \dfrac{7}{2}\right)$

Exemple 2 : on donne le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 & L_1 \\ 5x + 6y + 7z = 8 & L_2 \\ 9x + 10y + 9z = 8 & L_3 \end{cases} \underset{\substack{\Leftrightarrow \\ L_3 - 9L_1 \to L_3}}{L_2 - 5L_1 \to L_2} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 & L_1 \\ 0x - 4y - 8z = -12 & L_2 \\ 0x - 8y - 18z = -28 & L_3 \end{cases}$$

$$\overset{-\frac{1}{4}L_2\to L_2}{\Leftrightarrow}\begin{cases} x+2y+3z=4 & L_1\\ 0x+y+2z=3 & L_2\\ 0x-8y-18z=-28 & L_3\end{cases}\underset{L_3+8L_2\to L_3}{\overset{(S')}{\Leftrightarrow}}\begin{cases} x+2y+3z=4 & L_1\\ 0x+y+2z=3 & L_2\\ 0x+0y-2z=-4 & L_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases} L_3\ :\ z=\dfrac{-4}{-2}=2\\ L_2\ :\ y=3-2\times 2=-1\\ L_1\ :\ x=4-2(-1)-3\times 2=0\end{cases}\qquad \text{d'où la solution}\quad (0\,;\,-1\,;\,2)$$

Le cas général

Soit le système $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$

On forme la matrice de travail (3×4) suivante : $\mathbf{A}_w = \begin{array}{c} \\ L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}\!\!\begin{array}{c} C_1\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3\end{pmatrix}\end{array}$

On teste les coefficients de la colonne C_1 :

- Si $a_{11}\neq 0$, on divise la ligne L_1 par a_{11} sinon passe au coefficient suivant a_{21},
- si $a_{21}\neq 0$, on échange la ligne L_1 et L_2 et on divise la nouvelle ligne L_1 par a_{21} sinon on passe au coefficient suivant a_{31}
- si $a_{31}\neq 0$, on échange la ligne L_1 et L_3 et on divise la nouvelle ligne L_1 par a_{31}
- si tous les coefficients de C_1 sont nuls, le système n'admet pas de solution unique.

En divisant L_1 par a_{11}, on obtient une nouvelle matrice $\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3\end{pmatrix}$

En faisant les combinaisons linéaires : $L_2-a_{21}L_1\to L_2$ et $L_3-a_{31}L_1\to L_3$

On obtient une nouvelle matrice : $\mathbf{A}_w = \begin{array}{c} \\ L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & C_2 & C_3 & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1\\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2\\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3\end{pmatrix}\end{array}$

On effectue les tests sur C_2 avec a'_{22} et a'_{32}, puis on divise L_2 par $a'_{22}\neq 0$.

Enfin on effectue le test sur C_3 avec a''_{33}.

On obtient par des combinaisons linéaires alors, si le système admet une solution unique, la matrice suivante :

$$\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b''_1\\ 0 & 1 & 0 & b''_2\\ 0 & 0 & 1 & b''_3\end{pmatrix}$$

La solution est alors $(b''_1\,;\,b''_2\,;\,b''_3)$.

L'algorithme

On automatise la résolution générale :

```
1  import numpy as np
2  def gauss(Aw):
3      Aw = Aw.astype(float)
4      for j in range(3):
5          i=j
6          while Aw[i,j]==0:
7              i=i+1
8              if i==3:
9                  return "pas de solution unique"
10         Aw[[i,j]]=Aw[[j,i]]
11         Aw[j,:]=1/Aw[j,j]*Aw[j,:]
12         for k in range(3):
13             if k!=j:
14                 Aw[k,:]=Aw[k,:]-Aw[k,j]*Aw[j,:]
15     return Aw[:,3]

>>> gauss(np.array([[2,-1,0,1],[-1,2,-1,2],[0,-1,2,3]]))
array([ 2.5,  4. ,  3.5])
>>> gauss(np.array([[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,9,8]]))
array([ 0.,  -1.,  2.])
>>> gauss(np.array([[1,2,3,4],[1,-1,1,5],[2,1,4,9]]))
'pas de solution unique'
```

1 : On charge le module numpy (module pour écrire des matrices
2 : On définit la fonction gauss qui prend comme argument la matrice de travail $\mathbf{A}_w$
3 : On transforme les coefficients de $\mathbf{A}_w$ en flottants
4 : On teste les coefficients de la colonne j
5 : On prend la ligne $i = j$
6 : Si le coefficient $a_{ij} = 0$
7 : On passe à la ligne suivante
8 : Si tous les coefficients sont nuls
9 : On renvoie qu'il n'y a pas de solution unique
10 : On permute les lignes en cas de coefficient nul
11 : On divise la ligne j par a_{jj}
12 : Pour les trois lignes
13 : Pour la ligne différente de j
14 : On effectue les combinaisons linéaires
15 : On renvoie la colonne 4

La matrice $\mathbf{A}_w$ s'écrit avec numpy :

np.array([[$a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1$],[$a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2$],[$a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_3$]])

On teste avec les deux premiers exemples et avec un système n'ayant pas de solution unique :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x \quad - y \quad + z = 5 \\ 2x + y + 4z = 9 \end{cases}$$