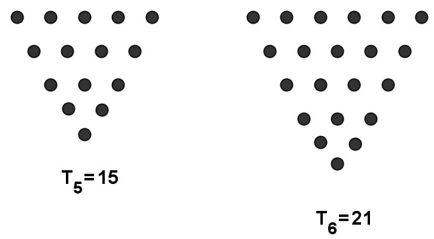
Devoir sur les fonctions et algorithme

correction 28 02 2011

Exercice 1 :

Algorithme et nombres triangulaires

1) Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.



2) Écrire un algorithme qui pour un entier naturel non nul n donné, calculer et affiche les nombres triangulaires successsifs T_1, T_2, T_3, …,T_n.
On passe d'un nombre triangulaire au suivant en lui ajoutant ce nombre.
$T + n \rightarrow T$
On peut écire le programme suivant :

```
Entrer N
T prend la valeur 0
Pour I de 1 à N
    T prend la valeur T + I
    Afficher T
FinPour
```

3) Rédiger le programme associé sur votre calculatrice.

```
: Prompt N
: 0 → T
: For(I,1,N)
:     T + I → T
:     Disp T
: End
```

4) Utiliser le programme pour trouver les valeurs de n telles que :
$T_n \geqslant 100$ puis $T_n \geqslant 1000$.
On pourrait faire un autre programme :

```
: Prompt N
: 0 → I
: 0 → T
: While T < N
:     I + 1 → I
:     T + I → T
: End
: Disp I
```

On trouve alors : $T_n \geqslant 100 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 14$ et $T_n \geqslant 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 45$
on a ($T_{13} = 91$ et $T_{14} = 105$ puis $T_{44} = 990$ et $T_{45} = 1035$)

Exercice 2 :

Algorithme et $\sqrt{7}$

1) Effectuer à la mains 4 itérations en remplissant le tableau suivant :

a	2	2,5	2,5	2,625
b	3	3	2,75	2,75
m	2,5	2,75	2, 625	2,6875
m^2	6,25	7,5625	$\simeq 6,89$	$\simeq$7,2

2) Quel est le rôle de cet algorithme ?
Le but de cet algorithme est de se rapprocher par itérations successives de $\sqrt{7}$

3) Rédiger le programme associé sur votre calculatrice, puis donner l'encadrement donné par le programme.

```
: 2 → A
: 3 → B
: While (B − A) ⩾ 10^−3
:     (A + B) ÷ 2 → M
:     If M² < 7
:     Then
:         M → A
:     Else
:         M → B
:     End
: End
: Disp A
: DispB
```

On trouve alors : $A = 2,6455078$ et $B = 2,6464844$

Exercice 3 :

Plongeur

1) Vérifier que : $h(t) = -4\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 4$

$$\begin{aligned} -4\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 &= -4\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) + 4 \\ &= -4t^2 + 4t - 1 + 4 \\ &= -4t^2 + 4t + 3 \\ &= h(t) \end{aligned}$$

2) A quelle hauteur se trouve le plongeoir ? (on se justifiera)
La hauteur du plongeoir est déterminé par la hauteur à $t = 0$. On trouve alors 3 m

3) Quelle est l'altitude maximale du plongeur ? (on se justifiera)
A l'aide la forme canonique, on trouve les variations de la fonction h.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

La hauteur maximale du plongeur est donc de 4 m

4) Au bout de combien de temps le plongeur arrive-t-il dans l'eau ?
Le plongeur arrive dans l'eau quand sa hauteur est nulle.

$$h(t) = 0$$
$$-4\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = 0$$
$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

on prend la solution positive

$$t - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{soit} \quad t = \frac{3}{2}$$

Le plongeur arrive dans l'eau après une seconde et demi.

Exercice 4 :

Un petit muret

1) Montrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $BM = 2 + \dfrac{6}{AP}$
On sait que le mur et le muret sont à la verticale donc $(AN)//(BM)$. Nous sommes donc dans une configuration de Thalès. On a alors l'égalité suivante :

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AN}{BM}$$
$$\frac{AP}{AP+3} = \frac{2}{BM}$$
$$AP \times BM = 2(AP+3)$$
$$BM = \frac{2AP+6}{AP}$$
$$BM = 2 + \frac{6}{AP}$$

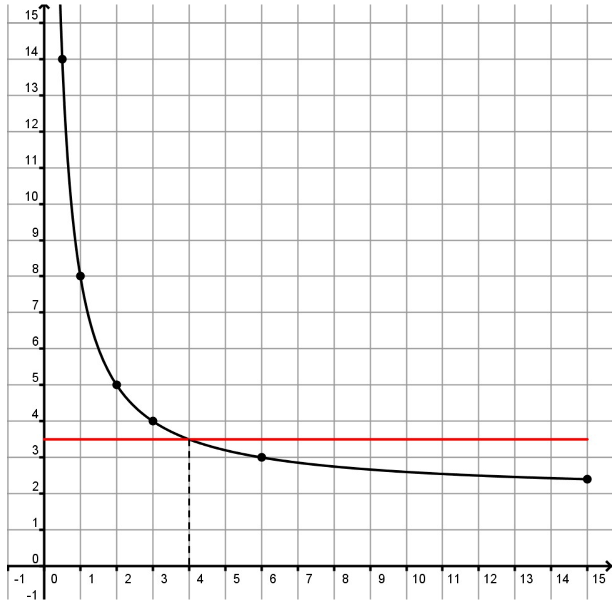
2) a) Donner le tableau de variation de la fonction inverse : $\dfrac{1}{x}$.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{6}{x}$ et $2 + \dfrac{6}{x}$ aussi.
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	6	15
$f(x)$	14	8	5	4	3	2,4

c) Représenter la fonction f pour les valeurs de x situées dans l'intervalle $]0; 15]$. On prendra comme unité le cm sur les deux axes.



3) On cherche où situer le projecteur afin qu'une marque située à 3,5 m de hauteur sur le mur ne soit jamais éclairée. Quelles sont les valeurs de x possibles ?

On cherche donc à résoudre $f(x) \geqslant 3,5$. Graphiquement, on trace la droite $y = 3,5$, et on prend les abscisses des points de la courbe qui sont au dessus de cette droite. On doit avoir $x \leqslant 4$.

Par le calcul :

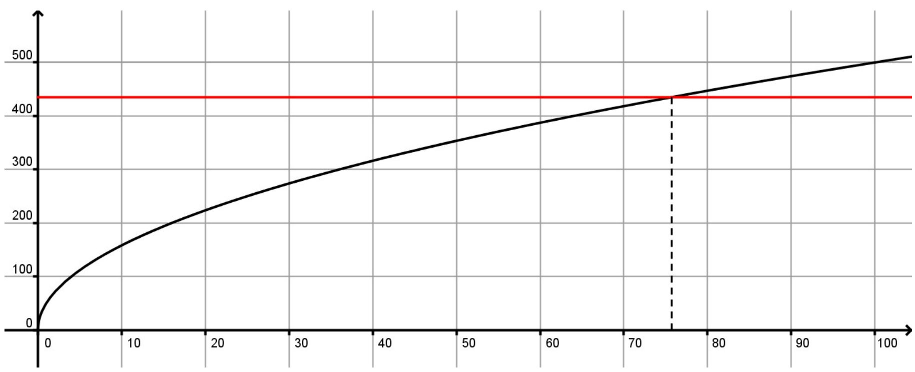
$$2 + \frac{6}{x} \geqslant 3,5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{x} \geqslant 1,5 \quad \Leftrightarrow \quad 1,5x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 4$$

Le projecteur doit se situer au maximum à 4 m du muret.

Exercice 5 :

En musique

1) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0; 100]$.



2) Conjecturer le sens de variation de cette fonction sur $[0; +\infty[$.
   La fonction est manifestement croissante sur $\mathbb{R}_+$
3) Soit $x_2 > x_1 > 0$. On utilise la quantité conjuguée

$$\begin{aligned}\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} &= \frac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}\end{aligned}$$

   Comme $x_2 > x_1 > 0$, alors $x_2 - x_1 > 0$ et comme la somme de deux racines est positive, la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Si on multiplie par 50, on ne change pas les variations donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4) Déterminer la tension de cette corde pour qu'elle donne le **la** de fréquence 435 Hz, d'abord avec la calculatrice, ensuite par le calcul.
   La calcultrice donne, par intersection de la courbe et de la droite $y = 435$, la tension : 75,69 N.

   Par le calcul, on doit avoir :

$$50\sqrt{T} = 435 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{T} = \frac{435}{50} \quad \Leftrightarrow \quad T = \left(\frac{435}{50}\right)^2 = 75,69 \text{ N}$$