Correction du contrôle

du lundi 05 décembre 2011

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$. On donnera la réponse sous forme d'intervalle. (6 points)

1) On a :

$$\begin{aligned} 3(2x-1)-5(x+4) &\geqslant 1\\ 6x-3-5x-20 &\geqslant 1\\ 6x-5x &\geqslant 1+3+20\\ x &\geqslant 24 \end{aligned} \qquad S=[24;+\infty[$$

2) On a :

$$\begin{aligned} 3x+2(x-1) &> 7x+2\\ 3x+2x-2 &> 7x+2\\ 3x+2x-7x &> 2+2\\ -2x &> 4\\ x &< -2 \end{aligned} \qquad S=]-\infty;-2[$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3}-3x &< \frac{4x+1}{9}\\ (\times 9)\qquad 3x-6-27x &< 4x+1\\ 3x-27x-4x &< 6+1\\ -28x &< 7\\ x &> -\frac{7}{28}=-\frac{1}{4} \end{aligned} \qquad S=\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$$

4) On a :

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{4}-\frac{x+1}{2} &\geqslant \frac{7x-5}{8}\\ (\times 8)\qquad 6x+2-4(x+1) &\geqslant 7x-5\\ 6x+2-4x-4 &\geqslant 7x-5\\ 6x-4x-7x &\geqslant -2+4-5\\ -5x &\geqslant -3\\ x &\leqslant \frac{3}{5} \end{aligned} \qquad s=\left]-\infty;\frac{3}{5}\right]$$

5) On a :

$$\begin{aligned} \frac{5x-2}{9}-\frac{x+7}{6} &> -1\\ (\times 18)\qquad 10x-4-3x-21 &> -18\\ 10x-3x &> 4+21-18\\ 7x &> 7\\ x &> 1 \end{aligned} \qquad S=]1;+\infty[$$

6) On a :

$$\begin{aligned} -x+4(x-1) &\leqslant 3x \\ -x+4x-4 &\leqslant 3x \\ -x+4x-3x &\leqslant 4 \\ 0x &\leqslant 4 \qquad \text{toujours vrai} \qquad S=\mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes (5 points)

1) $(2x+3)(-3x+7)<0$

Valeurs frontières $2x+3=0$ et $-3x+7=0$

$x=-\dfrac{3}{2}$ et $x=\dfrac{7}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-3x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+3)(-3x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{7}{3};+\infty\right[$$

2) $(5x+3)(2x-1)+3(2x-1)(x+3)\leqslant 0$ on factorise

$$\begin{aligned} (2x-1)(5x+3+3x+9) &\leqslant 0 \\ (2x-1)(8x+12) &\leqslant 0 \\ 4(2x-1)(2x+3) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Valeurs frontières $2x-1=0$ et $2x+3=0$

$x=\dfrac{1}{2}$ et $x=-\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x-1)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$$

3) $(3x-4)^2>(-4x+5)^2$ on factorise

$$\begin{aligned} (3x-4)^2-(-4x+5)^2 &> 0 \\ (3x-4+4x-5)(3x-4-4x+5) &> 0 \\ (7x-9)(-x+1) &> 0 \end{aligned}$$

Valeurs frontières $7x-9=0$ et $-x+1=0$

$x=\dfrac{9}{7}$ et $x=1$

x	$-\infty$	1	$\frac{9}{7}$	$+\infty$
$7x-9$	$-$	$-$	0	$+$
$-x+1$	$+$	0 $-$		$-$
$(7x-9)(-x+1)$	$-$	0 $+$	0	$-$

$S = \left]1; \frac{9}{7}\right[$

4) $\dfrac{5-x}{x+2} \leqslant 0$

Valeurs frontières $\quad 5-x=0 \quad x=5 \quad$ et $\quad x+2=0 \quad x=-2$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$5-x$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0 $+$	0	$+$
$\dfrac{5-x}{x+2}$	$-$	$\Vert$ $+$	0	$-$

$S =]-\infty; -2[\cup [5; +\infty[$

5) $\dfrac{2x-3}{x-4} \leqslant -3$ on change la forme

$$\frac{2x-3}{x-4} + 3 \leqslant 0$$
$$\frac{2x-3+3x-12}{x-4} \leqslant 0$$
$$\frac{5(x-3)}{x-4} \leqslant 0$$

Valeurs frontières $\quad x-3=0 \quad x=3 \quad$ et $\quad x-4=0 \quad x=4$

$$D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$x-3$	$-$	0 $+$		$+$
$x-4$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{5(x-3)}{x-4}$	$+$	0 $-$	$\Vert$	$+$

$S = [3; 4[$

Exercice 3

Second degré (2 points)

1) On a :

$$\begin{aligned}(x-3)^2+6 &= x^2-6x+9+6\\ &= x^2-6x+15\end{aligned}$$

2) On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-3)^2 \geqslant 0 \quad$ donc $\quad (x-3)^2+6 \geqslant 6 > 0$

On en déduit alors que la quantité $x^2-6x+15$ est toujours strictement positive

Exercice 4

Union et intersection d'intervalles (3 points)

On obtient les ensembles suivants :

1) $]-\infty;1[\cup[9;+\infty[$ 2) $]1;5]$ 3) $[-3;+\infty[$

Exercice 5

Inéquation paramétrique (2 points)

On résout l'inéquation en fonction de m :

$$\begin{aligned}5+x &< 2x+7m-3\\ x-2x &< -5-3+7m\\ -x &< -8+7m\\ x &> 8-7m\end{aligned}$$

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned}8-7m &= -6\\ -7m &= -14\\ m &= 2\end{aligned}$$

On doit donc avoir $m=2$ pour que l'inéquation ait comme solution $]-6;+\infty[$

Exercice 6

Problème (2 points)

On pose x : montant minimum en € des ventes mensuelles

On a alors :

$$\begin{aligned}600+0,25x &> 1000+0,15x\\ 0,25x-0,15x &> 1000-600\\ 0,1x &> 400\\ x &> 4000\end{aligned}$$

Le représentant pense pouvoir réaliser au moins 4000 € de ventes mensuelles.