Correction du contrôle

Du lundi 04 juin 2012

Exercice 1

Équation de droite **(5 points)**

1) On donne les points A$(-2; -1)$, B$(-1; 2)$, C$(4; 1)$ et D$(2; -1)$

   a) On calcule : $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$ et $\overrightarrow{CD} = (-2; -2)$. Les vecteurs directeurs ne sont manifestement pas colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont sécantes. (Si on calcule le déterminant, on trouve $4 \neq 0$)

   b) Soit M$(x; y)$ un point quelconque de la droite d. On a :

$$\det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

   On obtient : $3(x-4) - (y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 11$

2) Dans un repère, on donne trois points : A$(2; 4)$, B$(-2; 0)$, C$(4; -2)$

   a) On obtient I$(0; 2)$ et J$(3; 1)$

   b) Pour la droite (CI)

$$m = \frac{2+2}{0-4} = -1 \quad \text{et} \quad p = y_I - mx_I = 2$$

   L'équation réduite de la droite (CI) est donc : $y = -x + 2$

   Pour la droite (BJ)

$$m = \frac{1-0}{3+2} = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad p = y_B - mx_B = \frac{2}{5}$$

   L'équation réduite de la droite (BJ) est donc : $y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$

   c) Les coordonnées du point K vérifient le système : $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases}$

   On a donc :

$$\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = -x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = -5x + 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{2}{3}$$

   Le point K, qui correspond à l'intersection de deux médianes soit le centre de gravité, a pour coordonnées $K\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Exercice 2

Systèmes **(10 points)**

Résoudre les systèmes suivants (on ne demande pas de calculer le déterminant)

1) $\begin{cases} 3x - 7y = 1 & (\times -5) \\ 5x + 2y = 29 & (\times 3) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{aligned} -15x + 35y &= -5 \\ 15x + 6y &= 87 \\ \hline 0x + 41y &= 82 \\ y &= \frac{82}{41} = 2 \end{aligned}$$

On remplace $y = 2$ dans la 1re équation

$$\begin{aligned} 3x - 7 \times 2 &= 1 \\ 3x - 14 &= 1 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$S\ \{(5; 2)\}$

2) $\begin{cases} -5x + 7y = 7 & (\times 7) \\ 7x - 10y = -20 & (\times 5) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{aligned} -35x + 49y &= 49 \\ 35x - 50y &= -100 \\ \hline 0x + y &= 51 \\ y &= 51 \end{aligned}$$

On remplace $y = 51$ dans la 1re équation

$$\begin{aligned} 5x + 7 \times 51 &= 7 \\ 5x + 357 &= 7 \\ 5x &= 350 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

$S\ \{(70; 51)\}$

3) $\begin{cases} 0,5x + 1,5y = 463 \\ -0,1x + 13y = 3\,312{,}2 & (\times 5) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{aligned} 0,5x + 1,5y &= 463 \\ -0,5x + 65y &= 16\,561 \\ \hline 0x + 66,5y &= 17\,024 \\ y &= \frac{17\,024}{66,5} = 256 \end{aligned}$$

On remplace $y = 256$ dans la 1re équation

$$\begin{aligned} 0,5x + 1,5 \times 256 &= 463 \\ 0,5x + 384 &= 463 \\ 0,5x &= 79 \\ x &= 158 \end{aligned}$$

$S\ \{(158; 256)\}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{3} & (\times 12) \\ \frac{5}{7}x + y = 1 & (\times 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 4 & (\times -5) \\ 5x + 7y = 7 & (\times 2) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{aligned} -10x - 15y &= -20 \\ 10x + 14y &= 14 \\ \hline 0x - y &= -6 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

On remplace $y = 6$ dans la 1re équation du second système

$$\begin{aligned} 2x + 3 \times 6 &= 4 \\ 2x + 18 &= 4 \\ 2x &= -14 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

$S\ \{(-7; 6)\}$

5) $\begin{cases} \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{2}y = 2 \quad (\times 6) \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{2}y = -1 \quad (\times 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 15y = 12 \\ 2x + 21y = -6 \quad (\times -4) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{array}{r} 8x + 15y = 12 \\ -8x - 84y = 24 \\ \hline 0x - 69y = 36 \end{array}$$

$$y = -\frac{36}{69}$$

$$y = -\frac{12}{23}$$

On remplace $y = -\dfrac{12}{23}$ dans la 1re équation du 2nd système

$$8x - 15 \times \frac{12}{23} = 12$$

$$8x - \frac{180}{23} = \frac{276}{12}$$

$$8x = -\frac{456}{23} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{57}{23}$$

$$S\left\{\left(\frac{57}{23}; -\frac{12}{23}\right)\right\}$$

Exercice 3

Changement de variable **(3 points)**

On pose $X = x^2 \geqslant 0$ et $Y = y^2 \geqslant 0$, le système devient alors :

$$\begin{cases} 3X - Y = 23 \quad (\times 2) \\ X + 2Y = 17 \end{cases}$$

Le système devient :

$$\begin{array}{r} 6X - 2Y = 46 \\ X + 2Y = 17 \\ \hline 7X + 0Y = 63 \end{array}$$

$$X = \frac{63}{7} = 9$$

On remplace $X = 9$ dans la 1re équation

$$3 \times 9 - Y = 23$$

$$-Y = 23 - 27$$

$$Y = 4$$

On revient à x et y, on a alors :

$x^2 = 9$ et $y^2 = 4$

donc $x = 3$ ou $x = -3$ donc $y = 2$ ou $y = -2$

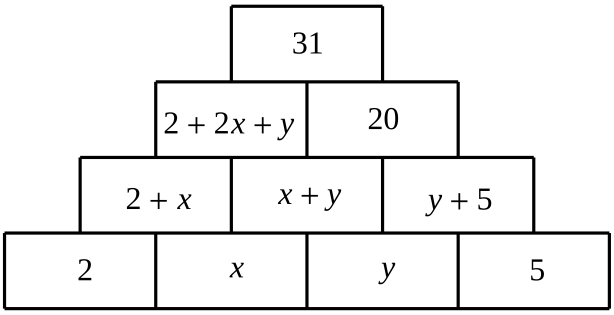
On a alors 4 couples solution : $S = \{(-3; -2); (-3; 2), (3; -2), (3; 2)\}$

Exercice 4

Problèmes **(6 points)**

1) On obtient le système suivant (cf pyramide)

$$\begin{cases} (2 + 2x + y) + 20 = 31 \\ (x + y) + (y + 5) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 9 \quad (\times -2) \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$



Le système devient :

$$\begin{array}{r} -4x - 2y = -18 \\ x + 2y = 15 \\ \hline -3x + 0y = -3 \\ x = 1 \end{array}$$

On remplace $x = 1$ dans la 1^re^ équation

$$2 + y = 9$$
$$y = 7$$

Les deux nombres x et y en bas de la pyramide sont donc respectivement 1 et 7

2) Voici la réponse d'un élève :

Si toutes les personnes avaient été des adultes la recette aurait été de $256 \times 6 = 1\,536$ *€. Or la recette est de 1 248 €. Chaque fois que l'on remplace une entrée adulte par une entrée enfant la recette diminue de 2 €…*

a) or le différentielle de la recette est : $1\,536 - 1\,248 = 288$. Il faut donc remplacer $\dfrac{288}{2} = 144$ places adultes par des places enfants.
Il y a donc eu 144 enfants et $256 - 144 = 112$ adultes.

b) Cette méthode s'appelle *la méthode de fausse position* car on suppose au départ une répartition fausse (aucun enfant) pour rectifier l'écart de la recette à l'aide d'un algorithme approprié.

Cette méthode est très ancienne : elle semble prendre sa source 2000 ans av. J.-C. On la trouve dans les papyrus de l'Égypte ancienne comme le papyrus Rhind et le papyrus de Moscou. On la retrouve également dans la mathématique chinoise quelques siècles av. J.-C. puis chez les mathématiciens Indiens, puis arabes (comme Al-Khwarizmi, Al-Banna) et enfin en Occident (Fibonacci, Pacioli, Recorde, …).