Correction du contrôle

Jeudi 04 octobre 2012

L'usage de la calculatrice est intertdit

Exercice 1

Décomposition en nombres premiers **(2 points)**

1) On a les décompositions suivantes :

$$\begin{array}{r|l} 1\,260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ Donc $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$

2) On obtient donc : $\dfrac{1\,260}{924} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7}{2^2 \times 3 \times 7 \times 11} = \dfrac{15}{11}$.

Exercice 2

Effectuer les calculs suivants en vous justifiant et en donnant le résultat à l'aide d'une fraction irréductible. **(5 points)**

1) $A = \dfrac{7}{4} + \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{12} = \dfrac{21 + 10 - 7}{12} = 2$

2) $B = \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{6} \times \dfrac{1}{14} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{10 - 1 + 8}{12} = \dfrac{17}{12}$

3) $C = \dfrac{30}{49} \times \dfrac{21}{16} \times \dfrac{56}{27} = \dfrac{2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 7}{7^2 \times 2^4 \times 3^3} = \dfrac{2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2}{2^4 \times 3^3 \times 7^2} = \dfrac{5}{3}$

4) $D = \dfrac{\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{10}}{\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}} = \dfrac{\dfrac{8-1}{10}}{\dfrac{4-1}{3}} = \dfrac{\dfrac{7}{10}}{\dfrac{3}{6}} = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{6}{3} = \dfrac{7}{5}$

5) $E = \dfrac{3^2 \times 2^3 \times 15^2}{6^2 \times 25^3} = \dfrac{3^2 \times 2^3 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 3^2 \times 5^6} = \dfrac{2 \times 3^2}{5^4} = \dfrac{18}{625}$

Exercice 3

Nombres rationnels et nombres décimaux. **(3 points)**

1) Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme le rapport de deux entiers. Un nombre rationnel est décimal si le dénominateur de sa fraction irréductible n'est composé que de puissances de 2 ou de 5.

2) On a :

a) $\dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{3 \times 5}$ n'est pas décimal

b) $\dfrac{17}{40} = \dfrac{17}{2^3 \times 5}$ est décimal

c) $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$ est décimal

d) $\dfrac{81}{60} = \dfrac{27}{20} = \dfrac{27}{2^2 \times 5}$ est décimal

Exercice 4

Notation scientifique (3 points)

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

- $A = 3{,}215 \times 10^{12}$
- $B = 1{,}72 \times 10^{-6}$
- $C = 5,6 \times 10^{-4}$

2) Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

- $D = 432\ 100$
- $E = 0{,}057\ 8$
- $F = 0{,}038\ 5$

Exercice 5

Rationnel non décimal. **(4 points)**

1) Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\dfrac{73}{23}$

a) La 12^{e} décimale de l'écriture décimale de $\dfrac{73}{23}$ est : 8

b) L'écriture décimale périodique de $\dfrac{73}{23}$ est : $3{,}173\ 913\ 043\ 478\ 260\ 869\ 565\ 2 \cdots = 3,\overline{173\ 913\ 043\ 478\ 260\ 869\ 565\ 2}$.

c) Lorsque l'on divise par 23, on ne peut avoir que 22 restes non nuls possibles. Le premier reste est en A2, donc en A(2 + 22) = A24 (23^{e} reste) est un reste déjà obtenu. Il s'agit de 4

2) a) Calculer : $100\,a - a = 536,\overline{36} - 5,\overline{36} = 531$

b) On en déduit alors que : $99a = 531 \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{531}{99} = \dfrac{59}{11}$

Exercice 6

Radicaux **(3 points)**

1) Simplifier les nombres suivants :

a) $A = 7\sqrt{63} - 3\sqrt{28} + \sqrt{7} = 7 \times 3\sqrt{7} - 3 \times 2\sqrt{7} + \sqrt{7} = 21\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + \sqrt{7} = 16\sqrt{7}$

b) $B = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \dfrac{(1 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{4 - 5} = \dfrac{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 5}{-1} = 3 + \sqrt{5}$

2) Montrer en développant que les nombres C et D sont égaux.

$C = (2\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 10 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4 = 6 - 2\sqrt{5}$

$D = (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$ on a donc : $C = D$.