Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 18 février 2012

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) Une fonction paire ou une fonction impaire est définie sur un ensemble de définition D_f symétrique par rapport à l'origine.
   - f est paire $\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$
   - f est impaire $\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$

2) **Application :**

   a) $f(-x) = \dfrac{4(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-4x}{x^2+1} = -f(x)$
   La fonction f est donc impaire.

   b) $g(-x) = \dfrac{1}{1-(-x)} + \dfrac{1}{1+(-x)} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = g(x)$
   La fonction g est donc une fonction paire.

Exercice 2

Fonction du second degré **(4 points)**

1) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 16x + 37 \\ &= 2(x^2 + 8x) + 37 \\ &= 2\left[(x-4)^2 - 16\right] + 37 \\ &= 2(x-4)^2 - 32 + 37 \\ &= 2(x-4)^2 + 5 \end{aligned}$$

2) On obtient le tableau de variation de la fonction f. ($a = 2$, $\alpha = 4$ et $\beta = 5$)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

3) Sur $]-\infty; 4[$, f est décroissante donc $f(-5) > f(2)$
Sur $]4, +\infty[$, f est croissante donc $f(9) < f(12)$

4) La fonction f est représentée par un parabole dirigée vers me haut ($a = 2 > 0$), dont le sommet S a pour coordonnées (4 ;5).

Exercice 3

Courbes **(2 points)**

Les fonctions f_1 et f_3 sont représentées par des paraboles dirigées vers le haut ($a = 1 > 0$). De plus la parabole représentant f_3 a pour sommet le point $(1; -2)$.

Donc f_3 est représentée par $\mathscr{C}_2$ et f_1 par $\mathscr{C}_1$

Les fonction f_2 et f_4 sont représentées par des paraboles dirigées vers le bas ($a = -\dfrac{1}{2} < 0$).
De plus la parabole représentant f_2 a pour sommet le point $(2; 2)$.
Donc f_2 est représentée par $\mathscr{C}_4$ et f_4 par $\mathscr{C}_3$

f_1	f_2	f_3	f_4
$\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_4$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_3$

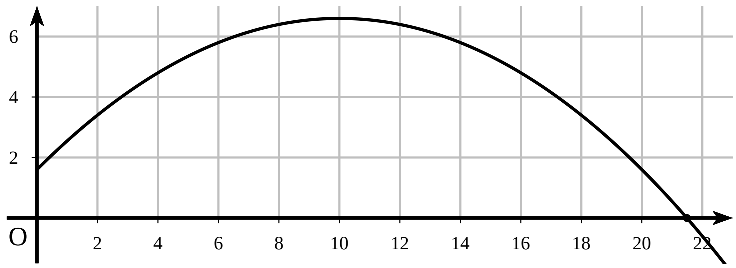
Exercice 4

Lancé du poids **(3 points)**

1) On a :

$$\begin{aligned} h(x) &= -0,05x^2 + x + 1,6 \\ &= -0,05(x^2 - 20x) - 1,6 \\ &= -0,05\left[(x-10)^2 - 100\right] + 1,6 \\ &= -0,05(x-10)^2 + 5 + 1,6 \\ &= -0,05(x-10)^2 + 6,6 \end{aligned}$$

2) Le poids est lancé à une altitude : $h(0) = 1,60$ m
3) L'altitude maximum du poids est donnée par : $h(10) = 6,60$ m
4) On obtient la courbe suivante :



La distance x atteinte par le poids, correspond à la distance lorsque le poids retombe sur le sol donc pour $h(x) = 0$.
On cherche donc l'intesection de la parabole avec l'axe des abscisses. On trouve alors : $x \simeq 21,49$ m
Le record de France est donc largement battu.

Exercice 5

Fonction homographique **(4 points)**

1) $f(x) = 2 + \dfrac{7}{x+3}$
2) L'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$
3) La fonction peut être décomposée de la façon suivante :
   - $x \mapsto x + 3$ croissante sur $\mathbb{R}$
   - $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
   - $x \mapsto 7x$ croissante sur $\mathbb{R}$

- $x \mapsto x+2$ croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f est décroissante sur $]-\infty;-3[$ et sur $]-3;+\infty[$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

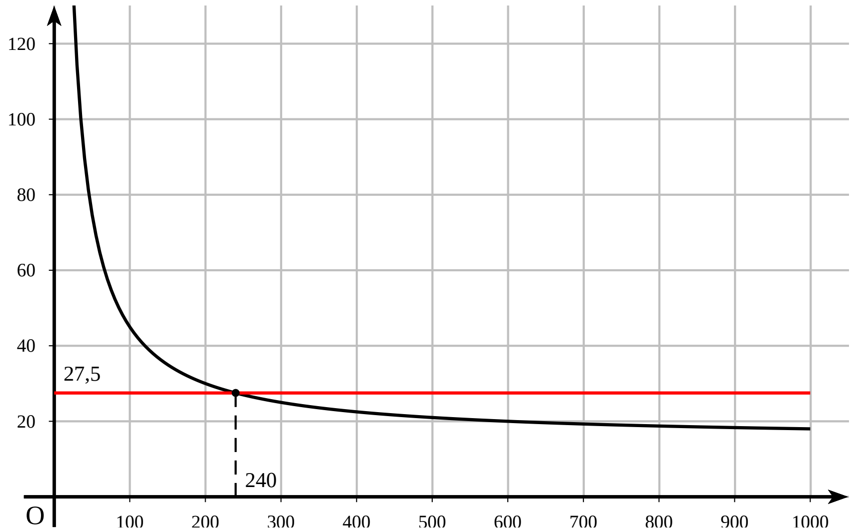
x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$

4) Cette fonction est représentée par une hyperbole centrée en O et dont les asymptotes sont parallèles aux axes et sont d'équations respectives : $y = 2$ et $x = -3$

Exercice 6

Economie **(4 points)**

1) $C(x) = 3000 + 15x$
2) $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{3000}{x} + 15$
3) On obtient la courbe suivante :



4) On veut que l'entreprise soit rentable, on doit donc avoir : $f(x) < 27,5$

On trace alors la droite d'équation $y = 27,5$ puis on cherche la partie de la courbe qui se trouve en dessous de cette droite. On trouve alors $x > 240$. L'entreprise doit alors produire plus de 240 unités pour que l'entreprise soit rentable.

Par le calcul : $f(x) < 27,5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3000}{x} + 15 < 27,5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3000}{x} < 12,5 \quad \Leftrightarrow$
$3000 < 12,5x \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{3000}{12,5} \quad \Leftrightarrow \quad x > 240$