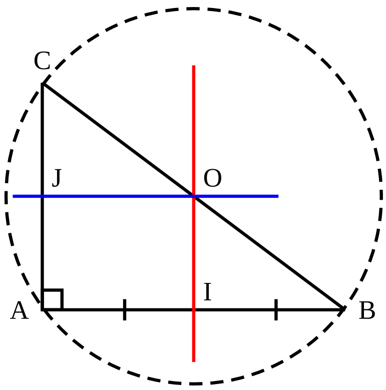
Correction contrôle de mathématiques
du jeudi 28 mars 2013

EXERCICE 1

ROC **(5 points)**

1) Soit un triangle ABC rectangle en A. Soit I le milieu de [AB] et O l'intersection de la droite passant par I et parallèle à (AC) avec le segment [BC]. J est l'intersection de la droite passant par O et parallèle à (AB) avec le segment [AC].



- Comme I est le milieu de [AB] et (IO)//(AC), d'après le théorème des milieux, on a : O milieu de [BC] (1)
- Comme (AB)⊥(AC) et (IO)//(AC) alors on a : (IO)⊥(AB) (2).

De (1) et (2), on en déduit que (IO) est la médiatrice de [AB].

- Comme O est le milieu de [BC] et (OJ)//(AB), d'après le théorème des milieux, on a : J milieu de [AC] (3).
- Comme (AB)⊥(AC) et (JO)//(AB) alors on a : (JO)⊥(AC) (4).

De (3) et (4), on en déduit que (JO) est la médiatrice de [AC].

O est donc l'intersection des médiatrices, donc le milieu de l'hypoténuse O est le centre du cercle circonscrit.

2) a) Le triangle ABD est inscrit dans un cercle de diamètre [BD], donc ABD est rectangle en A et donc : (AD)⊥(AB) (1)
De plus, on sait que (CH)⊥(AB) (2)
De (1) et (2), on a (AD)//(CH)

b) Le triangle CBD est inscrit dans un cercle de diamètre [BD], donc CBD est rectangle en C et donc : (CD)⊥(BC) (3)
De plus, on sait que (AH)⊥(BC) (4)
De (3) et (4), on a (CD)//(AH)

c) AHCD a ses côtés opposés deux à deux parallèles donc AHCB est un parallélogramme.

EXERCICE 2

Théorème de Thalès **(4 points)**

1) a) (OQ) et (AP) sécantes en O et (MN)//(PQ) donc d'après le théorème de Thalès, on a :

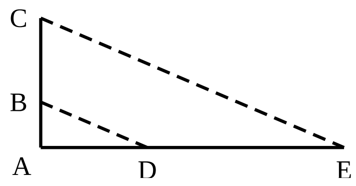
$$\frac{ON}{OQ} = \frac{OM}{OP} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ON}{9} = \frac{4,8}{6} \quad \Leftrightarrow \quad ON = \frac{9 \times 4,8}{6} = 7,2$$

b) Les points M, O, B d'une part et N, O, A d'autre part, sont alignés dans cet ordre. De plus

$$\frac{OA}{ON} = \frac{3}{7,2} = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{OM} = \frac{1,8}{4,8} = \frac{3}{8} \quad \text{donc} \quad \frac{OA}{ON} \neq \frac{OB}{OM}$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (MN) ne sont pas parallèles.

2) Comme les rayons de soleil sont parallèles, d'après la figure suivante et le théorème de Thalès, on a :



$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{140}{518} = \frac{AB}{230}$$

Donc : $AB = \dfrac{140 \times 230}{518} \simeq 62,2$

Soit $BC = AC - AB = 230 - 62,2 \simeq 167,8$ cm

EXERCICE 3

Théorème de Pythagore **(4 points)**

1) a) Comme ABCD est un rectangle, les triangles AMD, MBC et DNC snt respectivement rectangle en A, B et C. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$DM^2 = AD^2 + AM^2 = 3^2 + 1^1 = 10$

$MN^2 = MB^2 + BN^2 = (4 - 1)^2 + 1^2 = 10$

$DN^2 = DC^2 + CN^2 = 4^2 + (3 - 1)^2 = 20$

On a donc $DN^2 = DM^2 + MN^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DMN est rectangle en M, donc (MD)//(MN)

b) On a : $MN = DN = \sqrt{10}$ donc le triangle DMN est rectangle isocèle en M. La hauteur issue de M est aussi la médiane issue de M donc H = m[DN].

Dans le triangle DMH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$MH^2 = DM^2 - DH^2 = 10 - 5 \quad \Rightarrow \quad MH = \sqrt{5}$$

2) a) Comme ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \quad \Rightarrow \quad BC = 13$$

b) On pose : $\mathscr{A}$ = aire de ABC, on a

$$\mathscr{A} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2} \quad \Leftrightarrow \quad AB \times AC = BC \times AH$$

On a alors : $AH = \dfrac{AB \times AC}{BC} = \dfrac{12 \times 5}{13} = \dfrac{60}{13} \simeq 4,62$

EXERCICE 4

Trigonométrie **(4 points)**

1) On a :

$$\sin 58^\circ = \frac{AB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad AB = BC\sin 58^\circ = 13\sin 58^\circ \simeq 11,02$$

$$\cos 58^\circ = \frac{AC}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad AC = BC\cos 58^\circ = 13\cos 58^\circ \simeq 6.89$$

2) a) On a : $\sin 40^\circ = \dfrac{AH}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AH = AC\sin 40^\circ = 6\sin 40^\circ$

b) On a :

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{6\sin 40^\circ}{7} \qquad \alpha = \arcsin\left(\frac{6\sin 40^\circ}{7}\right) \simeq 33,4^\circ$$

EXERCICE 5

Hauteur d'une tour **(3 points)**

1) En supposant que la tour est perpendiculaire au sol, dans le triangle AHC, rectangle en H, on a

$$\tan\alpha = \frac{HC}{AH} = \frac{h}{AH} \quad \Rightarrow \quad AH = \frac{h}{\tan 42^\circ}$$

Dans le triangle BHC, rectangle en H, on a

$$\tan\beta = \frac{HC}{BH} = \frac{h}{BH} \quad \Rightarrow \quad BH = \frac{h}{\tan 27^\circ}$$

2) On a alors :

$$BH - AH = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{\tan 27^\circ} - \frac{h}{\tan 42^\circ} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad h\left(\frac{\tan 42^\circ - \tan 27^\circ}{\tan 27^\circ \times \tan 42^\circ}\right) = 10$$

D'où $h = 10 \times \dfrac{\tan 27^\circ \times \tan 42^\circ}{\tan 42^\circ - \tan 27^\circ} \simeq 11,74$ m