Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 03 juin 2013

EXERCICE 1

Algorithme **(4 points)**

a) I représente le n°du dernier étage effectué et A le nombre d'allumette de l'étage considéré.

b) À chaque étape, on rajoute 4 allumettes (deux de chaque côté). Donc pour réaliser un étage supplémentaire, ilfaut donc que N soit supérieur ou égal au nombre d'allumettes de l'étape antérieur (A) plus quatre.

c) On trouve pour $N = 10\,440$: $I = 72$ et $N = 0$.

On peut donc faire 72 étages avec 10 440 allumettes.

d) On trouve pour $N = 1\,600$: $I = 28$ et $N = 4$.

On peut faire 28 étages avec 1 600 allumettes et il en reste 4.

```
: Prompt N
: N − 3 → N
: 1 → I
: 3 → A
: While N ⩾ A + 4
:    A + 4 → A
:    N − A → N
:    I + 1 → I
: End
: Disp I, N
```

EXERCICE 2

Équation de droite **(4 points)**

1) Soit M$(x; y)$ un point de la droite (AB). Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est alors colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{AM}(x+4; y+1)$ et $\overrightarrow{AB}(5; 4)$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x+4 & 5 \\ y+1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x+4) - 5(y+1) = 0$$

On obtient alors l'équation cartésienne de la droite (AB) : $4x - 5y + 11 = 0$

2) a) Les milieux I et J ont comme coordonnées

$$\text{I}\left(-\frac{1}{2}; 1\right) \quad \text{et} \quad \text{J}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

b) Équation réduite de :

- (AC) : $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{1+2}{4+2} = \dfrac{1}{2}$ et $p = y_C - m \times x_C = 1 - \dfrac{1}{2} \times 4 = -1$

  La droite (AC) a pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x - 1$

- (IJ) : $m = \dfrac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \dfrac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{6}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $p = y_I - m \times x_I = 1 - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$

  La droite (IJ) a pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$

c) Les droites (AC) et (IJ) sont parallèles car leurs équations ont même coefficient directeur (1/2)
On retrouve le théorème des milieux : « *dans un triangle, le droite qui relie le milieu de deux côtés est parallèle au troisième* »

Exercice 3

Système **(10 points)**

1) a) On calcule le déterminant du système : $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 9 = 29$

$\delta \neq 0$, donc le système admet une unique solution.

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 26 & (\times 4) \\ 3x + 4y = 33 & (\times -3) \end{cases}$ On obtient alors

$$\begin{aligned} 20x - 12y &= 104 \\ 9x + 12y &= 99 \\ \hline 29x &= 203 \\ x &= \frac{203}{29} = 7 \end{aligned}$$

On remplace $x = 7$ dans la première équation,

$$\begin{aligned} 35 - 3y &= 26 \\ -3y &= -9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

La solution du système est donc : $S = \{(7; 3)\}$

2) a) $\begin{cases} x - 4y = -2 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$ Par substitution

de (1), on a : $x = 4y - 1$
On remplace dans (2) : $4y - 2 + y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$
En remplaçant dans (1) : $x = 3 - 1 = 2$

La solution du système est donc : $S = \{(2; 1)\}$

b) $\begin{cases} 4x + 7y = 4 & & (\times -5) \\ 2x + 5y = 9 & (\times -2) & (\times 7) \end{cases}$ Par combinaison

$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 4 \\ -4x - 10y &= -18 \\ \hline -3y &= -14 \\ y &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -20x - 35y &= -20 \\ 14x + 35y &= 63 \\ \hline -6x &= 43 \\ x &= -\frac{43}{6} \end{aligned}$$

La solution du système est donc : $S = \left\{\left(-\dfrac{43}{6}; \dfrac{14}{3}\right)\right\}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{5}y = -\dfrac{11}{5} & (\times 15) \\ 5x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 9y = -33 \\ 5x + 3y = 4 & (\times -2) \end{cases}$ On obtient alors

$$\begin{aligned} 10x + 9y &= -33 \\ -10x - 6y &= -8 \\ \hline 3y &= -41 \\ y &= -\frac{41}{3} \end{aligned}$$

On remplace $x = 7$ dans la deuxième équation,

$$\begin{aligned} 5x - 41 &= 4 \\ 5x &= 45 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

La solution du système est donc : $S = \left\{\left(9; -\dfrac{41}{3}\right)\right\}$

3) a) On calcule de déterminant :

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3,2 & 4,8 \end{vmatrix} = 2 \times 4,8 - 3 \times 3,2 = 0$$

Les deux droites du système sont donc parallèles.

b) On calcule : $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{c'}{a'} = \dfrac{-1,6}{-3,2} = \dfrac{1}{2}$

On a donc : $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$ les deux droites sont alors confondues. Le système admet donc une droite solution d'équation : $2x - 3y - 1 = 0$

Exercice 4

Problème dû à Clavius (vers 1608) **(2 points)**

On appelle :
- x : nombre de problèmes résolus correctement par le fils
- y : nombre de problèmes non résolus correctement par le fils.

Comme les sommes reçues et données sont égales, on a : $8x = 5y \quad (1)$

Comme le nombre total de problèmes est 26, on : $x + y = 26 \quad (2)$

On résout par substitution :

- de (2), on a : $y = 26 - x$
- on remplace dans (1) : $8x = 5(26 - x) \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 130 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad 13x = 130$

On trouve donc $x = 10$. Le fils de Clavius a donc résolu correctement 10 problèmes sur 26.