Correction contrôle de mathématiques

Lundi 31 mars 2014

Exercice 1

Construction **(5 points)**

Soient un triangle ABC, un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] et de centre O représentés en annexe. On complétera la figure au fur et à mesure de l'énoncé.

1) a) Voir figure

   b) L'orthocentre d'un triangle est l'intersection des hauteurs. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

   c) Les triangles BDC et BEC sont inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] donc les triangles BDC et BEC sont respectivement rectangles en D et E.

   Les droites (CD) et (BE) sont alors restectivement les hauteurs issues de C et B du triangles ABC. Comme l'orthocentre est le point de concourance des hauteurs, H est l'orthocentre du trangle ABC. La droite (AH) est alors la hauteur issue de A du triangle ABC. On a alors : $(AH) \perp (BD)$.

2) a) Voir figure.

   b) ABCM et ACBN sont des parallélogramme donc on peut écrire :

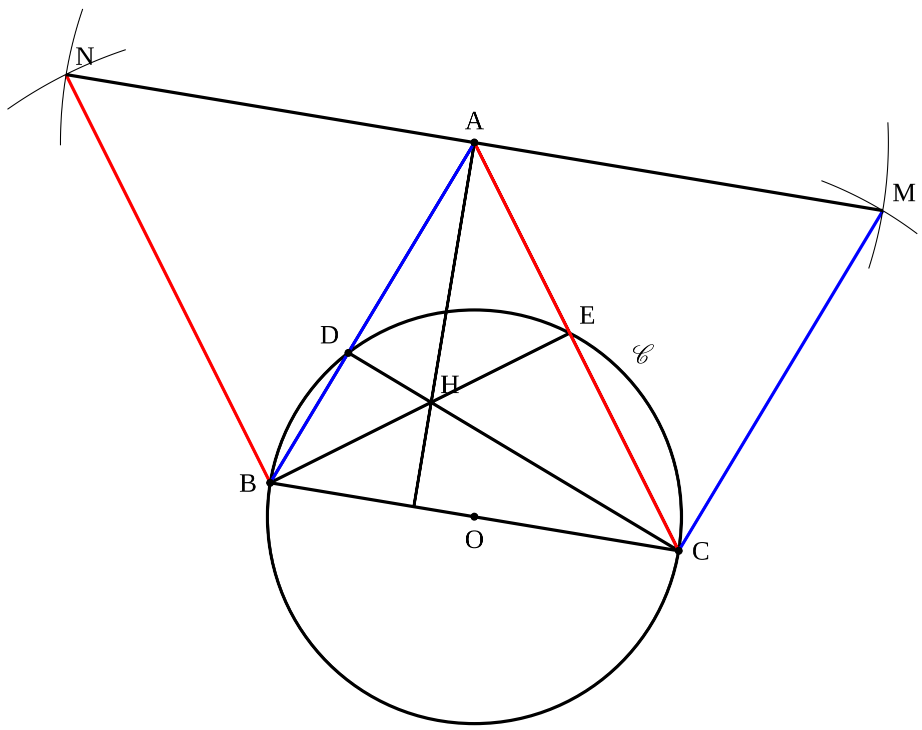
   $$(BC) \,//\, (AM) \quad \text{et} \quad (BC) \,//\, (AN) \quad \Rightarrow \quad (AM) \,//\, (AN) \quad \Rightarrow \quad (AN) = (AM)$$

   A est donc sur la droite (MN).

   ABCM et ACBN sont des parallélogramme on a donc :

   $$BC = AM \quad \text{et} \quad BC = AN \quad \Rightarrow \quad AM = AN$$

   A étant sur (MN) et AM = AN donc A est le milieu de [MN].



EXERCICE 2

Un rectangle dans un triangle **(6 points)**

1) Les droites (MN) et (AB) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{CN}}{\text{CA}} = \frac{\text{MN}}{\text{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{CN}}{6} = \frac{x}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CN} = \frac{8}{6}x = \frac{3}{4}x$$

On a alors : $\text{AN} = 6 - \dfrac{3}{4}x$

2) Pour que ANMP soit un carré, on doit avoir : MN = AN on a alors :

$$\text{MN} = \text{AN} \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - \frac{3}{4}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{7} \times 6 = \frac{24}{7}$$

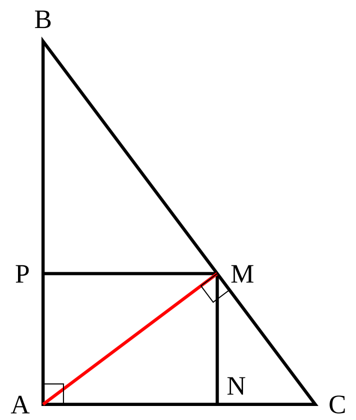
3) Si $x = 4$ alors CN = 3 C est alors le milieu de [AC]. Comme (MN) // (AB) d'après le théorème des milieux, M est le milieu de [BC].

4) a) ANMP est un rectangle, donc ses diagonales sont de même longueur. Si la distance NP est minimale, il en sera de même pour AM. Pour que la AM soit minimale, il est nécessaire que (AM)⊥(BC).

   b) Le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad BC = 10$$

   c) Comme (AM)⊥(BC) le triangle AMC est rectangle en M, on a alors :



$$\left.\begin{array}{l} \text{Dans ABC,} \quad \sin\widehat{\text{BCA}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{BC}} \\[2ex] \text{Dans AMC,} \quad \sin\widehat{\text{BCA}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AC}} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{AM}}{\text{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{AM} = \frac{\text{AB} \times \text{AC}}{\text{BC}} = \frac{8 \times 6}{10} = 4,8$$

Comme NP = MN NP = 4,8

EXERCICE 3

Trigonométrie **(5 points)**

On donne la figure ci-contre.

1) Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\text{AB}^2 = \text{BC}^2 - \text{AC}^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2^2 = 20 - 4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \text{AB} = 4$$

2) Dans le triangle ABE rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\text{AE}^2 = \text{BE}^2 - \text{AB}^2 = (3\sqrt{2})^2 - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

Dans le triangle ACD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\text{AD}^2 = \text{DC}^2 - \text{AC}^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

Dans le triangle ADE rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\text{DE}^2 = \text{AD}^2 + \text{AE}^2 = 5 + 2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \text{DE} = \sqrt{7}$$

3) Dans le triangle ACD rectangle en A :

$$\cos\alpha = \frac{\text{AC}}{\text{DC}} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2^{\circ}$$

Dans le triangle ABE rectangle en A :

$$\sin\beta = \frac{\text{AC}}{\text{BC}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 26,6^{\circ}$$

Dans le triangle ACD rectangle en D :

$$\cos\gamma = \frac{\text{AB}}{\text{BE}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 19,5^{\circ}$$

Exercice 4

La croix du bucheron **(4 points)**

1) Comme la baguette [AB] est verticale, alors les droites (AB) et (EG) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

   a) dans le triangle CFG : $\dfrac{\text{CA}}{\text{CG}} = \dfrac{\text{CD}}{\text{CF}}$ (1)

   b) dans le triangle CEG : $\dfrac{\text{CA}}{\text{CG}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{EG}}$ (2)

2) De (1) et (2), on a : $\dfrac{\text{CD}}{\text{CF}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{EG}}$.

   Comme AB = CD, on a alors $\dfrac{1}{\text{CF}} = \dfrac{1}{\text{EG}}$ et donc CF = EG

3) La hauteur de l'arbre est alors égale à la distance de l'observateur à l'arbre.