Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 11 décembre 2014

Exercice 1

Inéquation du 1er degré **(6 points)**

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$. On donnera la réponse sous forme d'intervalle.

1) On a :

$$\begin{aligned} 2-5x &\geqslant 4+3x \\ -5x-3x &\geqslant -2+4 \\ -8x &\geqslant 2 \\ x &\leqslant -\frac{1}{4} \end{aligned} \qquad S=\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right]$$

2) On a : $2(4x-3)-3(2x+1) > -x+2$

$$\begin{aligned} 8x-6-6x-3 &> -x+2 \\ 8x-6x+x &> 6+3+2 \\ 3x &> 11 \\ x &> \frac{11}{3} \end{aligned} \qquad S=\left]\frac{11}{3};+\infty\right[$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{6}+\frac{x+7}{2} &> 2x-9 \\ (\times 6) \quad x-3+3x+21 &> 12x-54 \\ x+3x-12x &> 3-21-54 \\ -8x &> -72 \\ x &< 9 \end{aligned} \qquad S=]-\infty;\ 9[$$

4) On a :

$$\begin{aligned} \frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{16}+5 &\leqslant \frac{-x+4}{8} \\ (\times 16) \quad 12(2x+1)-(5x+3)+80 &\leqslant 2(-x+4) \\ 24x+12-5x-3+80 &\leqslant -2x+8 \\ 24x-5x+2x &\leqslant -12+3-80+8 \\ 21x &\leqslant -81 \\ x &\leqslant -\frac{27}{7} \end{aligned} \qquad S=\left]-\infty;-\frac{27}{7}\right[$$

5) On a :

$$\begin{aligned} (2x+1)(9-3x)+2 &\leqslant (6x-1)(1-x) \\ 18x-6x^2+9-3x+2 &\leqslant 6x-6x^2-1+x \\ 18x-3x-6x-x &\leqslant -9-2-1 \\ 8x &\leqslant -12 \\ x &\leqslant -\frac{3}{2} \end{aligned} \qquad S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$$

6) On a :

$$\frac{1-3x}{2}+\frac{9x-1}{4}<\frac{3x-5}{4}$$

$$(\times 4) \quad 2-6x+9x-1<3x-5$$

$$-6x+9x-3x<-2+1-5$$

$$0x<-6 \quad \text{impossible} \qquad S=\varnothing$$

EXERCICE 2

Inéquations produit et quotient **(6 points)**

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes. Il est parfois nécessaire de factoriser l'expression.

1) $(2x-3)(1-7x)<0$

Valeurs frontières $\quad 2x-3=0 \quad x=\frac{3}{2} \quad$ et $\quad 1-7x=0 \quad x=\frac{1}{7}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1-7x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(2x-3)(1-7x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\left]-\infty;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$$

2) $x(5x-1)-3x(x-4)\leqslant 0$ on factorise

$$x[5x-1-3(x-4)]\leqslant 0$$

$$x(5x-1-3x+12)\leqslant 0$$

$$x(2x+11)\leqslant 0$$

Valeurs frontières $\quad x=0 \quad$ et $\quad 2x+11=0 \quad x=-\frac{11}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{11}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x(2x+11)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left[-\frac{11}{2};0\right]$$

3) $(4x^2-9)(x-1)\geqslant \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)(x-1)\geqslant 0$

Valeurs frontières $\quad 2x-3=0 \quad x=\frac{3}{2} \quad , \quad 2x+3=0 \quad x=-\frac{3}{2} \quad , \quad x-1=0 \quad x=1$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x-3)(2x+3)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left[-\frac{3}{2};1\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$$

4) $\dfrac{7-2x}{2-x} \leqslant 0$ ensemble de définition $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

Valeurs frontières $\quad 7-2x = 0 \quad x = \dfrac{7}{2}$ $\quad$ et $\quad 2 - x = 0 \quad x = 2$

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$7-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{7-2x}{2-x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S = \left]2\ ;\ \dfrac{7}{2}\right]$

5) $\dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 1$ ensemble de définition $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

On annule le second membre

$$\frac{2x+1}{x+2} - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1-x-2}{x+2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} \geqslant 0$$

Valeurs frontières $\quad x - 1 = 0 \quad x = 1$ $\quad$ et $\quad x + 2 = 0 \quad x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -2[\cup [1\ ;+\infty[$

Exercice 3

Vrai-Faux **(4 points)**

1) **Faux :** $x^2 < 16 \quad \not\Rightarrow \quad x < 4$ car x^2 est toujours positif ou nul ce qui n'est pas le cas de x. L'implication serait vraie pour x positif. Pour résoudre cette inéquation, on annule le second terme, on factorise puis à l'aide d'un tableau de signe on résout.

$x^2 < 16 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+4) < 0$

Les valeurs frontières sont -4 et 4. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in]-4;\ 4[$

2) **Vrai :** Un carré est positif ou nul. Si l'on veut qu'il soit strictement positif, il ne doit pas être nul

$(x+3)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

3) **Faux :** On ne peut faire de produit en croix avec une inéquation car ici $(x+2)$ peut changer de signe. On doit annuler le second terme, réduire puis à l'aide d'un tableau de signe résoudre.

$$\frac{3x-1}{x+2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+2} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-1-x-2}{x+2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x+2} > 0$$

Les valeurs frontières sont $\frac{3}{2}$ et -2. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-3}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty; -2[\cup \left]\frac{3}{2}\,; +\infty\right[$$

4) **Vrai :** car le signe du quotient est égal au signe du produit.
Le quotient $\frac{a}{b} > 0$ si, et seulement si le produit $ab > 0$

$$\frac{5(x+2)}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5(x+2)(x-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\div 5) \quad (x+2)(x-1) > 0$$

EXERCICE 4

Union et intersection d'intervalles **(2 points)**

1) $x \in]-3; -2]$
2) $x \in]-\infty;\ 0[\cup[5\,; +\infty[$

EXERCICE 5

Problème **(3 points)**

1) Soit x la consommation d'eau en m^3.

$$32 + 1,13x < 14 + 1,72x \quad \Leftrightarrow \quad 1,13x - 1,72x < 14 - 32 \quad \Leftrightarrow \quad -0,59x < -18$$
$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{18}{0,59} \ (\simeq 30,508)$$

Au delà de 30,5 m^3, le tarif annuel de la consommation d'eau de la commune A est plus avantageux que le tarif de la commune B

2) Soit d la distance en km parcouru par Eric suite à son plein.

$$54 - 0,07d > 5 \quad \Leftrightarrow \quad -0,07d > 5 - 54 \quad \Leftrightarrow \quad d < \frac{49}{0,07} \quad \Leftrightarrow \quad d < 700$$

Eric devra faire le plein avant d'avoir parcouru 700 km pour éviter d'être sur la réserve.