Les graphes

Table des matières

1 Définitions

Définition 1 : Introduction

Un graphe G est une représentation composée de sommets et d'arêtes.

L'ordre d'un graphe est égal au nombre de ses sommets.

Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.

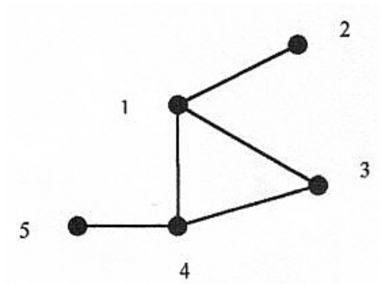
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Un sous-graphe est un graphe G' composé de certains sommets de G ainsi que toutes les arêtes qui relient ces sommets.

Théorème 1 : La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à 2 fois le nombre d'arêtes du graphe.
Remarque : une boucle se compte deux fois.

Définition 2 : La matrice associée à un graphe possédant n sommets est la matrice suivante pour le graphe ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Définition 3 : Graphe et couleurs

Un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents est appelé graphe complet.

Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que 2 sommets adjacents ne porte pas la même couleur.

Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorier.

Remarque : Un algorithme pour colorier un graphe : l'agorithme glouton. On passe en revue chacun des sommets en les classant dans l'ordre décroissant de leurs degrés.

Théorème 2 : Soit Δ le plus haut degré des sommets d'un graphe. Alors le nombre chromatique de ce graphe est inférieur ou égal à $\Delta + 1$.

Soit G' un sous-graphe complet de G d'ordre n alors le nombre chromatique de G est supérieur ou égal à n.

Si C est le nombre chromatique de G alors : $n \leqslant C \leqslant \Delta + 1$

2 Chaîne eulérienne : les points de Königberg.

Définition 4 : Chaîne

Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.

Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues. Si, de plus, elle est composée d'arêtes toutes distinctes, on dit que c'est un cycle.

Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes :
- ➪ Elle contient toutes les arêtes du graphe
- ➪ Chaque arête n'est « décrite » qu'une seule fois.

Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Théorème 3 : Théorèmes d'Euler.

1) G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   - ➪ Tous les sommets de G sont de degré pair.
   - ➪ G admet un cycle eulérien.

2) G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   - ➪ Deux sommets (et deux seulement) A et B de G sont de degré impair.
   - ➪ G admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B.

3 Recherche de la plus courte chaîne

Définition 5 : Graphe pondéré.

Un graphe pondéré est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.

Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent.

Une plus courte chaîne entre deux sommets est, parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

Remarque : Une méthode pour déterminer la chaîne la plus courte : l'algorithme de Dijkstra.

4 Opération sur les matrices.

Définition 6 : Matrices

Une matrice $A_{n,p}$ est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes.

Une matrice n'ayant qu'une ligne est appelée matrice ligne ou vecteur ligne.

Une matrice n'ayant qu'une colonne est appelée matrice colonne ou vecteur colonne.

La transposée de la matrice A est notée ${}^tA$: ses lignes sont les colonnes de A, ses colonnes sont les lignes de A.

I_n désigne la matrice unité d'ordre n. Elle possède que des « 1 » sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs.

Calcul de $A + B$ et de kA. Pas de problème.

Calcul de $A \times B$. Non commutatif mais associatif.

5 Puissance n^e de la matrice associée à un graphe.

Définition 7 : Longueur et distance

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui composent la chaîne.

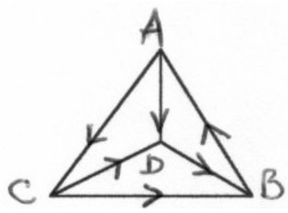
La distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.

Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées.

Exemple : Une matrice d'un graphe orienté. Soit le graphe suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Théorème 4 : A désigne la matrice associée à un graphe (orienté ou non).

Alors le terme de A^n situé sur la i^e ligne et la j^e colonne est égal au nombre de chaîne de longueur n reliant i à j.

6 Graphe étiqueté et graphe probabiliste.

Théorème 5 : Graphe probabiliste

Dans un graphe orienté, une boucle est une arête dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet donné vaut 1. La matrice associé est appelée matrice de transition.

Théorème 6 : Soit M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste à n sommets, P_0 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'état n. On a alors :

$$P_n = P_0 \times M^n$$

Soit un graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de zéro, alors :

- L'état de P_n à l'étape n converge vers P un état indépendant de l'état initial P_0
- De plus, P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.