E. LES GRAPHES PROBABILISTES

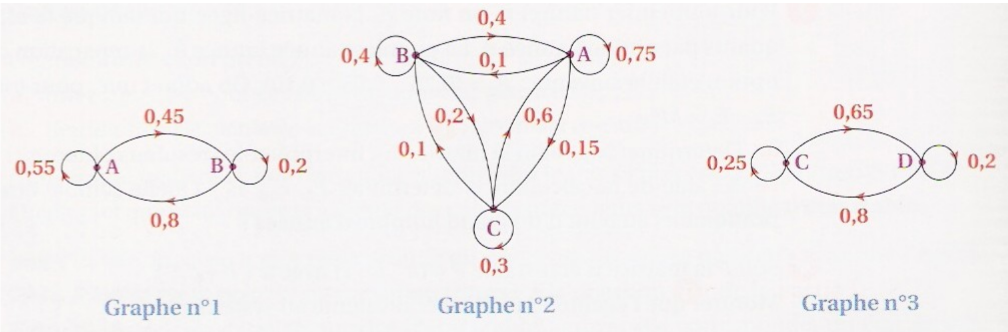
1 Présentation

Définition 1 Un graphe **probabiliste** est un graphe **orienté** et **pondéré** dans lequel :
- il y a au plus un arc d'un sommet à l'autre ;
- la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

REMARQUES :
1. Les poids des arcs sont alors des probabilités (nombres réels compris entre 0 et 1).
2. Un graphe probabiliste indique les différents états possibles d'un système (sommets du graphe) et les probabilités de passage d'un état à l'autre (poids des arcs).

Exemple 1

- Le graphe n°1 est un graphe probabiliste d'ordre 2.
- Le graphe n°2 est un graphe probabiliste d'ordre 3.
- Le graphe n°3 n'est pas un graphe probabiliste car la somme des poids des arcs issus du sommet C est égale à 0,9 et non à 1.



2 État probabiliste et matrice de transition

Définition 2
Soit une expérience aléatoire à deux issues possibles A et B.
A chacune de ces issues est affectée une probabilité, p_A et p_B.
Lorsque l'on répète cette expérience, dans les mêmes conditions, on se retrouve après chaque réalisation dans un état donné. Cet état à l'issue de chacune des réalisations de l'expérience est appelé **état probabiliste**.
Il peut être représenté par une matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ qui traduit la probabilité d'obtenir l'issue A ou l'issue B après n réalisation de l'expérience aléatoire.
On a $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel n.

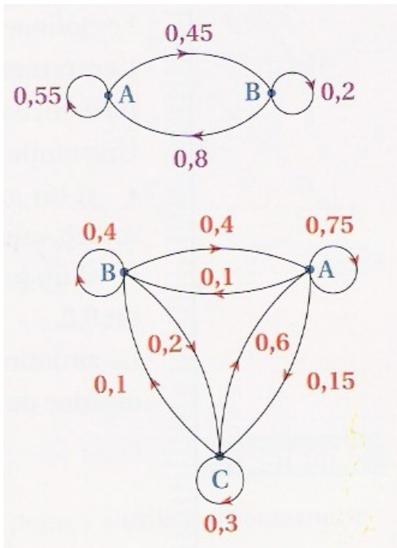
REMARQUE :
On généralise sans difficulté cette définition à une expérience aléatoire ayant un nombre n fini d'issues possibles ($n \geq 2$).

Définition 3

Soit G un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La **matrice de transition** M de G est la matrice carrée d'ordre n telle que m_{ij} est égal à la probabilité portée par l'arc reliant le sommet i au sommet j s'il existe et 0 sinon.

REMARQUE :
La matrice de transition M permet d'étudier l'évolution du système que schématise le graphe probabiliste.

Exemples 1



- La matrice de transition M_1 associée au graphe ci-contre est (en supposant les sommets rangés dans l'ordre alphabétique) : $M_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$
- La matrice de transition M_2 associées au graphe ci-contre est (en supposant les sommets rangés dans l'ordre alphabétique) :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,15 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

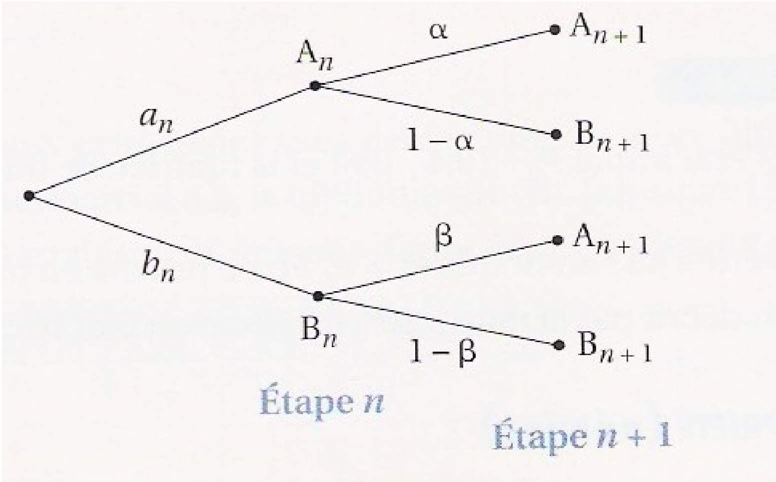
Propriété 1

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste associé à un système donné.
Soit P_0 la matrice-ligne décrivant l'état initial du système étudié.
Soit P_n la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n du système étudié.
On a les relations :

$$P_{n+1} = P_n \times M \qquad\qquad P_n = P_0 \times M^n$$

Démonstration (pour un graphe d'ordre 2) :
Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ traduisant un système à deux états A et B, et soit n un entier naturel.
- Soit A_n l'évènement : "on obtient A à l'étape n".
- Soit B_n l'évènement : "on obtient B à l'étape n".
- Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n.
- Soit $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape $n+1$.

On considère l'arbre pondéré suivant :



On a les relations (formule des probabilités totales) :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) = \alpha a_n + \beta b_n$$

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(Bn+1) \times P(B_n) = (1-\alpha)a_n + (1-\beta)b_n$$

Cela se traduit en écriture matricielle par : $P_{n+1} = P_n \times M$.
On a alors : $P_1 = P_0 \times M$

$$P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M \times M = P_0 \times M^2$$

$$P_3 = P_2 \times M = P_0 \times M^2 \times M = P_0 \times M^3$$

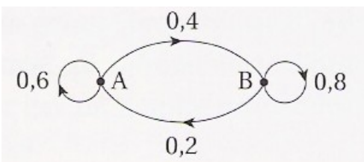
$$\vdots$$

$$P_n = P_{n-1} \times M = P_0 \times M^{n-1} \times M = P_0 \times M^n$$

REMARQUE :
La matrice M^n permet de trouver l'état probabiliste à l'étape n.

Exemple (*d'après Bac ES La Réunion 2008*)
Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A et une équipe B. L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs.
Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :
- si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6 ;
- si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

La situation précédente peut être schématisée par le graphe probabiliste ci-dessous et sa matrice de transition.



$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Pour une entier naturel n donné, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste lors du match n.
Enzo vient d'arriver dans le club et la probabilité a_0 qu'il joue dans l'équipe A pour le match de préparation (match 0) est 0,1.

- L'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
- On a donc, par exemple, $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$.
  La probabilité a_1 qu'Enzo joue dans l'équipe A pour le match 1 est 0,24.
- On a aussi, par exemple, $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,296 & 0,704 \end{pmatrix}$
  La probabilité a_2 qu'Enzo joue dans l'équipe A pour le match 2 est 0,296.

3 État stable

Définition 4

Soit un graphe probabiliste d'ordre n associé à une expérience donnée.
On appelle **état stable** un état probabiliste qui n'évolue pas lors de la répétition de l'expérience.

Exemple

Soit l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
On vérifie aisément que $P_1 = P_0$ et, de proche en proche que, $P_n = P_0$ pour tout entier naturel n.
L'état décrit par la matrice P_0 est donc un état stable.

Propriété 2 (admise)
Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice ne comporte pas de 0. L'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0.
L'état P est appelé **état stable du système** : il vérifie l'égalité $PM = P$.