Les nombres complexes
Le point de vue géométrique

Table des matières

1 Forme trigonométrique

1.1 Angle orienté et mesure principale

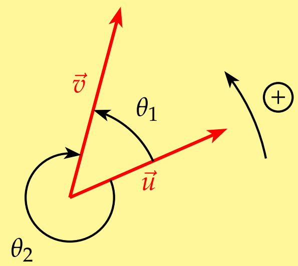
Définition 1 : Un angle orienté est défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$.

L'angle est alors orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

On dit que les mesures (en radian) θ_1 et θ_2 d'un même angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont égales modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + k \times 2\pi \quad \text{on note alors} \quad \theta_1 = \theta_2 \;\; [2\pi]$$

On appelle mesure principale d'un angle $(\vec{u}, \vec{v})$, la mesure θ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.



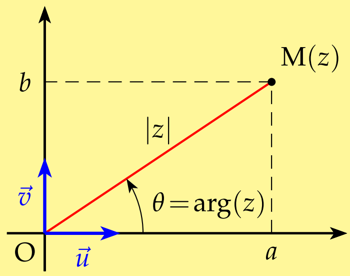
Remarque : On veillera à donner un angle orienté avec sa mesure principale : par exemple $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \;\; [2\pi]$.

1.2 Forme trigonométrique

Définition 2 : Soit $z = a + ib$ un complexe non nul.

La forme trigonométrique de z, est l'écriture de la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ module de z
- $\theta = (\vec{u}\,, \overrightarrow{OM}\,) = \arg(z) \;\; [2\pi]$ argument de z



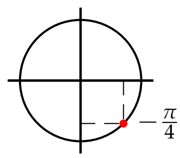
Remarque : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est à relier aux coordonnées polaires de $M(r\,;\,\theta)$.

Exemples :

Trouver la forme trigonométrique de $z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

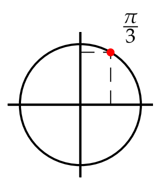
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \;\; [2\pi]$, d'où :



$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Trouver la forme algébrique de $z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

On a $z = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

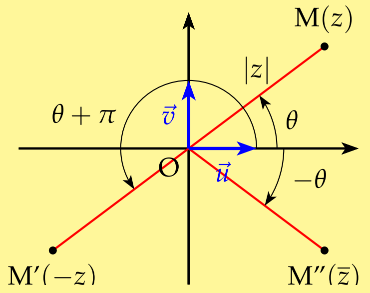


1.3 Relations de symétrie

Propriété 1 : Pour tout complexe z non nul, on a les relations suivantes :

$|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]$

$|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$



1.4 Relations trigonométriques

Théorème 1 : Formules d'addition

Pour tous réels a et b, on a les relations

① $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ③ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

② $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ④ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Démonstration : Formule ②. Soit les points A et B sur le cercle unité :

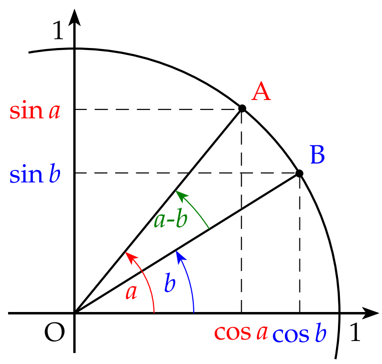
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons :

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Des deux égalités, on déduit la formule ② :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$



Pour trouver la formule ①, on remplace dans ② b par $-b$, on a alors :

$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)] \overset{②}{=} \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Pour trouver les formules ③ et ④ avec le sinus, on utilise les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

Remarque : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- Avec le cosinus on « ne panache pas » tandis qu'avec le sinus on « panache ».
- Avec le cosinus de $a+b$, on met un « moins » entre les deux termes.

Théorème 2 : Formules de duplication

Pour tout réel a, on a les relations :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration : On utilise les formules d'addition en faisant $b = a$.

1.5 Opérations sur les modules et arguments

Théorème 3 : Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$
$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

Démonstration : Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$:

$$\begin{aligned}
z\,z' &= r\,r'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= r\,r'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') \\
&= r\,r'[\underbrace{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}_{\cos(\theta+\theta')} + i(\underbrace{\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'}_{\sin(\theta+\theta')})] \\
&= r\,r'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))
\end{aligned}$$

Par identification, on a : $|z\,z'| = r\,r' = |z|\,|z'|$ et $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$

- On démontre $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ par récurrence.
- Pour le quotient, on pose $Z = \dfrac{z}{z'}$, on a donc $z = Z\,z'$. Du produit :

  $|z| = |Z|\,|z'| \quad \Leftrightarrow \quad |Z| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

  $\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z')$ $[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg(Z) = \arg(z) - \arg(z')$ $[2\pi]$

2 Forme exponentielle

2.1 Introduction

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$\begin{aligned}
f(\theta)f(\theta') &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= (\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') \\
&= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\
&= [\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')] = f(\theta+\theta')
\end{aligned}$$

Donc $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$.
Les seules fonctions dérivables non nulles ($f(0) = 1$) sur $\mathbb{R}$ qui transforment une somme en produit sont du type $f(x) = e^{kx}$.
En étendant la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, on pose $f(\theta) = e^{k\theta}$ avec $k \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Dérivons la fonction f pour déterminer k : $f'(\theta) = k\,e^{k\theta}$ et

$$f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i^2\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = if(\theta)$$

Par identification, on obtient alors $k = i$.

En étendant la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, on décide de poser $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

2.2 Définition

Définition 3 : La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \ [2\pi]$$

Remarque : On peut maintenant admirer l'expression d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Cette expression contient tous les nombres qui ont marqué l'histoire des mathématiques : 0 et 1 pour l'arithmétique, π pour la géométrie, i pour les nombres complexes et e pour l'analyse.

Exemple : Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$, on a : $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ donc $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

2.3 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 4 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

- Formule de Moivre : $\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{n\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$
- Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Remarque : Bien remarquer que pour $\sin\theta$, on divise par $2i$.

Démonstration :

- La formule de Moivre est l'application directe de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : $e^{na} = (e^a)^n$
- Pour les formules d'Euler, on développe la forme exponentielle :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta-\cos(-\theta)-i\sin(-\theta)}{2i} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta}{2i} = \sin\theta$$

3 Ensemble des complexes de module 1

3.1 Propriété

Théorème 5 : Soit $\mathbb{U}$, l'ensemble des complexes de module 1.

- $z \in \mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par rapport au produit et à l'inverse :

$$z, z' \in \mathbb{U} \quad \Rightarrow \quad zz' \in \mathbb{U} \text{ et } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

Démonstration : Propriété des modules pour le produit et l'inverse.

3.2 Racines n-ième de l'unité

Théorème 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les racines n-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.
- $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des n racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

- Leur somme est nulle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 0$
- Leurs images M_k dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité.

Démonstration : On décompose z et 1 en module argument, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = 0 \ \ [2\pi] \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\arg(z) = 2k\pi \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

- Il y a n angles distincts correspondant aux valeurs de $k \in [\![0, n-1]\!]$

- Les solutions sont les puissances de $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ car $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = z_1^k$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = 1 + z_1 + \cdots + z_1^{n-1} \overset{\text{suite géo}}{=} \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} = 0 \quad \text{car } z_1^n = z_0 = 1$$

- Soit les points $\mathrm{M}_k(z_k)$, on a alors $(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

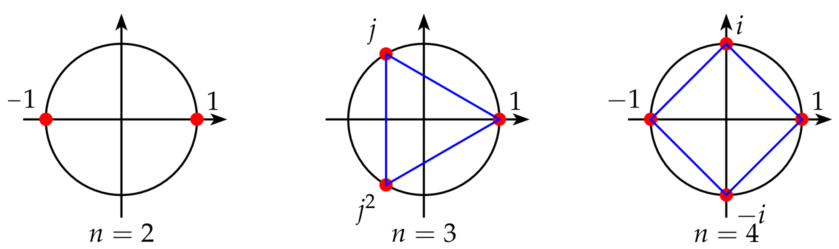
  Les points M_k sont alors les sommets d'un polygone régulier de n côtés.

Exemples : $\mathbb{U}_2 = \{1, e^{i\pi}\} = \{1, -1\}$,

$\mathbb{U}_3 = \left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$, on pose $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$ d'où $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$,

$\mathbb{U}_4 = \left\{1,\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1 ; -i\}$

On obtient les représentations suivantes :



4 Complexes et vecteurs

4.1 Affixe d'un vecteur

Théorème 7 : Pour tous points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on note :

- $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on a alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \;,\quad AB = |z_B - z_A| \;,\quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

- I milieu de [AB], on a alors : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

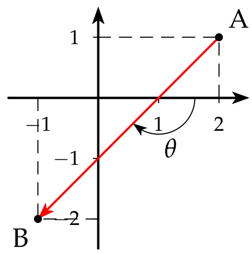
Remarque : Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Exemple : On donne : $A(2+i)$ et $B(-1-2i)$. Faire une figure puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la distance AB et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$ donc $\overrightarrow{AB}\,(-3-3i)$

- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. On pose $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

- On a : $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \quad \theta = -\dfrac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$



4.2 Ensemble de points

Théorème 8 : Soit $r > 0$, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant

- $|z - z_A| = r \quad \Leftrightarrow \quad AM = r$ est le cercle de centre A et de rayon r
- $|z - z_A| = |z - z_B| \quad \Leftrightarrow \quad AM = BM$ est la médiatrice du segment [AB]

4.3 Somme de deux vecteurs

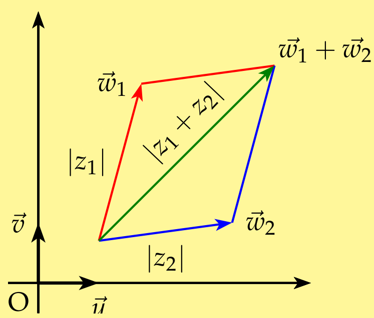
Théorème 9 : Soit $\overrightarrow{w_1}\,(z_1)$, $\overrightarrow{w_2}\,(z_2)$

on a alors : $\vec{w}_1 + \vec{w}_2\,(z_1 + z_2)$

et l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

La somme de deux complexes revient à additionner deux vecteurs dans le plan complexe et inversement.



4.4 Angle orienté

Théorème 10 : Pour tous points A, B, C et D tels que (A≠B) et (C≠D), on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Démonstration : D'après les règles sur les angles orientés :

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$$

on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\end{aligned}$$

4.5 Alignement, parallélisme et orthogonalité

Propriété 2 : Soit A, B, C et D quatre points distincts deux à deux

$$\text{A, B, C alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\text{(AB) et (CD) parallèles} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Démonstration : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \;[\pi]$

On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \;[\pi]$

même chose avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour deux droite parallèles

Propriété 3 : Soit A ≠ B et C ≠ D quatre points

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}$$

Démonstration : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2} \;[\pi]$

On en déduit que : $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \;[\pi]$

Remarque :

Pour montrer que ABC est rectangle isocèle en A, on montre que : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$